

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ ۝

ریاضی

8



پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور

جملہ حقوق بحق پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور محفوظ ہیں۔
اس کتاب کا کوئی حصہ نقل یا ترجمہ نہیں کیا جاسکتا اور نہ ہی اسے ٹیسٹ پیپر، گائیڈ بکس، خلاصہ جات،
نوٹس یا امدادی کتب کی تیاری میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

مصنفین

- پروفیسر محمد امین
- پروفیسر سعید
- محمد اشفاق بیگ
- ڈاکٹر شفیق الرحمن
- محمد انور
- محمد اختر شیرانی

مدیر

- فہیم حسین

ریویو کمیٹی

- ڈاکٹر اکبر علی
- پروفیسر منیر احمد چوہدری
- محمد اشفاق بیگ
- ڈاکٹر شفیق الرحمن

ریویو کمیٹی برائے این او سی

- پروفیسر ڈاکٹر اے۔ آر شکوری
- ڈاکٹر ایکٹر اسکول آف بائیولوجیکل سائنسز، پنجاب یونیورسٹی، لاہور
- ڈاکٹر اکبر علی (ریٹائرڈ)
- آئی۔ ای۔ آر پنجاب یونیورسٹی، لاہور
- محمد شکور
- سابقہ پرنسپل، کریسنٹ ماڈل ہائیئر سیکنڈری سکول، لاہور

نگران

- محمد اختر شیرانی
- مدیحہ محمود
- ڈاکٹر اکبر علی

سینئر آرٹسٹ

- مسز عائشہ وحید

کمپوزنگ اینڈ لے آؤٹ

- محمد اعظم
- عاطف مجید

مطبع:

تعداد اشاعت

تاریخ اشاعت

طباعت

ایڈیشن

زیر نظر کتاب (ریاضی 8) جماعت چہارم تا ہشتم کے نصاب 2006 میں علم و فہم کی بتدریج نشوونما کی طے شدہ رفتار اور معیار کو برقرار رکھنے کے لیے مرتب کی گئی ہے۔ اس کی تیاری کا آغاز اس وقت ہوا جب پرائیویٹ سیکٹر کی نصاب 2006 کی روشنی میں تیار کی گئی تمام کتب کی اغلاط سے پاک نہ ہونے کے باعث سلیکٹ کمیٹی نے اشاعت کی سفارش نہ کی اور یہ سب مسترد کر دی گئیں۔ یوں پنجاب ٹیکسٹ بک بورڈ کی نصاب 2002 کے مطابق تیار شدہ کتب کو ہی سال 15-2014 کے لیے شائع کرنا پڑا۔ اس صورت حال اور طلبہ کے بہترین مفاد کو ذہن میں رکھتے ہوئے بورڈ کی تیار شدہ اس کتاب کو نصاب 2006 کے مطابق ڈھال دیا گیا ہے اور اس کا ترمیم شدہ ایڈیشن آپ کے ہاتھ میں ہے۔

طباعت سے پہلے نظر ثانی کے لیے اس کتاب کو ماہرین کی کمیٹی کے سامنے پیش کیا گیا۔ کمیٹی کی سفارشات پر عمل درآمد اور تجاویز کی شمولیت سے کتاب کا معیار مزید بہتر ہو گیا۔ نظر ثانی کمیٹی نے کتاب کو مکمل طور پر نصاب 2006 کے مطابق پایا اور اس کی اشاعت کی سفارش کر دی۔

چونکہ بہتری کی گنجائش ہمیشہ رہتی ہے اس لیے کتاب کے متن کی مزید بہتری کے لیے آپ کی تجاویز اور قیمتی آرا کا انتظار رہے گا۔

(مصنفین)

فہرست

صفحہ	عنوانات	پونٹ
1	سیٹوں پر عوامل	1.
16	حقیقی اعداد	2.
39	عددی نظام	3.
54	مالیاتی حساب	4.
89	کثیر رقمی جملے	5.
98	اجزائے ضربی، ہمزاد مساواتیں	6.
122	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	7.
136	عملی جیومیٹری	8.
150	رقبہ اور حجم	9.
168	اثباتی جیومیٹری	10.
179	تکوئیات کا تعارف	11.
188	معلوماتی معاملات	12.
203	جوابات	i.
214	اصطلاحات	ii.
216	علامات	iii.

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- درج ذیل سیٹوں کو پہچان سکیں۔
 - قدرتی اعداد (N)
 - مکمل اعداد (W)
 - صحیح اعداد (Z)
 - ناطق اعداد (Q)
 - جفت اعداد (E)
 - طاق اعداد (O)
 - مفرد اعداد (P)
- سیٹ کا تختی سیٹ معلوم کر سکیں۔
- واجب (C) اور غیر واجب (\subseteq) تختی سیٹ کی تعریف کر سکیں۔
- سیٹ (A) کا قوت سیٹ $P(A)$ معلوم کر سکیں۔
- یونین اور تقاطع کے قوانین مبادلہ اور قوانین تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- تقسیمی قوانین کی پڑتال کر سکیں۔
- ڈی مارگن کے قوانین کو بیان کر سکیں اور ان کی پڑتال کر سکیں۔
- تین متراکب سیٹوں کا یونین اور تقاطع دکھا سکیں۔
- قانون تلازم اور تقسیمی قوانین کی بذریعہ وین اشکال پڑتال کر سکیں۔

1.1 سیٹ (Sets)

وضع اشیا کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔ جن اشیا پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے وہ اس سیٹ کے ارکان یا ممبران کہلاتے ہیں۔

1.1.1 سیٹ

اہم سیٹ اور ان کی علامتوں کی پہچان:

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$	قدرتی اعداد کا سیٹ
$W = \{0, 1, 2, \dots\}$	مکمل اعداد کا سیٹ
$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	صحیح اعداد کا سیٹ
$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$	مفرد اعداد کا سیٹ
$O = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$	طاق اعداد کا سیٹ
$E = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$	جفت اعداد کا سیٹ
$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$	ناطق اعداد کا سیٹ

1.1.2 تحتی سیٹ (Subset)

مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: سیٹ $\{2, 4\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کریں۔

حل: سیٹ $\{2, 4\}$ کے تمام تحتی سیٹ درج ذیل ہیں:

$$\phi, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}$$

مثال 2: سیٹ $\{3, 5, 7\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کریں۔

حل: سیٹ $\{3, 5, 7\}$ کے تمام تحتی سیٹ درج ذیل ہیں:

$$\phi, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}$$

مثال 3: سیٹ $\{a, b, c, d\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کریں۔

حل: سیٹ $\{a, b, c, d\}$ کے تمام تحتی سیٹ درج ذیل ہیں:

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$$

1.1.3 تعریفیں (Definitions)

(a) واجب تحتی سیٹ (Proper Subset)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو لیکن سیٹ A کا کم از کم ایک رکن ایسا ہو جو سیٹ B کا رکن نہ ہو تو سیٹ

A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہلائے گا۔ اس کو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں $A \subset B$ اور اسے پڑھتے ہیں سیٹ A واجب تحتی سیٹ ہے سیٹ B کا۔

مثال کے طور پر:

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ اور $B = \{1, 2, 3, 4\}$ تو $A \subset B$ کیونکہ سیٹ A کے تمام ارکان سیٹ B کے ارکان ہیں لیکن سیٹ B کا ایک رکن 4 سیٹ A کا رکن نہیں ہے۔

یاد رکھیے کہ:

(i) ہر سیٹ اپنا تختی سیٹ ہوتا ہے۔

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ (جو خالی نہ ہو) کا واجب تختی سیٹ ہوتا ہے۔

(b) غیر واجب تختی سیٹ (Improper Subset)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور سیٹ A ، سیٹ B کا تختی سیٹ ہو اور سیٹ B بھی سیٹ A کا تختی سیٹ ہو تو سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تختی سیٹ ہوگا اور سیٹ B سیٹ A کا غیر واجب تختی سیٹ ہوگا۔

نوٹ (i) ایک سیٹ کے تمام تختی سیٹ اس کے واجب تختی سیٹ ہوتے ہیں۔

(ii) واجب تختی سیٹ لکھنے کا طریقہ:

سب سے پہلے خالی سیٹ لکھیں۔ پھر ایک رکنی سیٹ (ایسا سیٹ جس کا صرف ایک رکن ہو۔ ایک رکنی سیٹ کہلاتا ہے) اس کے بعد دو ارکان والے سیٹ اور اسی طرح اس عمل کو اس وقت تک جاری رکھیں جب تک آخری سیٹ میں ارکان کی تعداد دیے ہوئے سیٹ کے ارکان کی تعداد کے برابر نہ ہو جائے۔

(iii) ہر سیٹ اپنا غیر واجب تختی سیٹ ہوتا ہے۔

(iv) خالی سیٹ کا کوئی واجب تختی سیٹ نہیں ہوتا۔

(v) ایک رکنی سیٹ کا صرف ایک واجب تختی سیٹ ہوتا ہے۔

1.1.4 قوت سیٹ / پاور سیٹ (Power Set)

ایک سیٹ کے تمام ممکن تختی سیٹوں کو سیٹ A کا پاور سیٹ کہتے ہیں اور اسے لکھتے ہیں $P(A)$

مثال کے طور پر:

اگر $A = \{a, b\}$ ، تو اس کے تمام ممکن تختی سیٹ یہ ہیں: $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

پس A کا پاور سیٹ

$$P(A) = \{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$$

مثال 4: $B = \{3, 6, 9\}$ کا پاور سیٹ لکھیں۔

حل: $B = \{3, 6, 9\}$

$$P(B) = \{ \phi, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\}, \{3, 6, 9\} \}$$

یاد رکھیے کہ:

اگر ایک سیٹ کے n ارکان ہوں، تو اس کے تمام ممکنہ تختی سیٹ 2^n ہوں گے۔

مثلاً اگر $X = \{1, 2, 3\}$ ہو تو اس کے تمام تختی سیٹ ہیں:

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

ان کی تعداد 8 ہے اور $2^3 = 8$

کیا آپ بتا سکتے ہیں؟

اگر ایک سیٹ A ، 4 ارکان پر مشتمل ہو تو $P(A)$ کے ارکان کی تعداد کتنی ہوگی؟

یاد رکھیے کہ:

- $P(A)$ کے ارکان سیٹ A کے تمام تختی سیٹوں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ یعنی $\{a\} \in P(A)$ لیکن $a \notin P(A)$
- خالی سیٹ کا پاور سیٹ خالی سیٹ نہیں ہوتا کیونکہ خالی سیٹ کے تختی سیٹوں کی تعداد 1 ہے یعنی $2^0 = 1$

$$P(\phi) = \{ \phi \} \text{ یا } \{ \{ \} \}$$

مشق 1.1

1- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام تختی سیٹ لکھیں۔

(i) $\{ \}$ (ii) $\{1\}$ (iii) $\{a, b\}$

2- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام واجب تختی سیٹ لکھیں۔

(i) $\{a\}$ (ii) $\{0, 1\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$

3- مندرجہ ذیل سیٹوں کے پاور سیٹ لکھیں۔

(i) $\{-1\}$ (ii) $\{a, b, c\}$

1.2 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets)

1.2.1 سیٹوں پر یونین اور تقاطع کے مبادلہ قوانین (Verification of Commutative and Associative Laws w.r.t. Union and Intersection)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو مبادلہ قوانین یونین اور تقاطع کے مطابق یوں لکھے جاتے ہیں:

(i) یونین کا قانون مبادلہ) $A \cup B = B \cup A$ (ii) تقاطع کا قانون مبادلہ) $A \cap B = B \cap A$

مثال 1: اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ اور $B = \{3, 5, 7, 9\}$ تو

(i) یونین کا قانون مبادلہ (ii) تقاطع کا قانون مبادلہ کی پڑتال (verification) کریں۔

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, B = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \cup \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{(i) حل:}$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$B \cup A = \{3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{پس}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \cap \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{(ii)}$$

$$= \{3, 5, 7, 9\}$$

$$B \cap A = \{3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$$= \{3, 5, 7, 9\}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{پس}$$

• یونین اور تقاطع کے قوانین متلازم

اگر A, B, C تین سیٹ ہوں تو قوانین متلازم بلحاظ یونین اور تقاطع بالترتیب یوں لکھتے ہیں:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad \text{(ii)} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

یاد رکھیے کہ:

تین سیٹوں کا یونین / تقاطع معلوم کرنے کے لیے پہلے کوئی سے دو سیٹوں کا یونین / تقاطع معلوم کریں اور پھر حاصل شدہ سیٹ کا تیسرے سیٹ سے یونین / تقاطع معلوم کریں۔

مثال 2: یونین کے قانون متلازم کی پڑتال: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{اور} \quad C = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{جب کہ}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{اور} \quad C = \{6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{حل:}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup (\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\})$$

$$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \dots \dots \dots \text{(a)}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}) \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \dots\dots\dots (b)\end{aligned}$$

L. H. S = R. H. S مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \text{ پس}$$

مثال 3: تقاطع کے قانونِ تلازم کی پڑتال: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

جب کہ A, B, C درج بالا مثال والے سیٹ ہیں۔

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap (\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}) \quad \text{حل:}$$

$$= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{6, 7, 8\}$$

$$= \phi \dots\dots\dots (a)$$

$$(A \cap B) \cap C = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}) \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$= \{3, 4\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$= \phi \dots\dots\dots (b)$$

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1.2.2 سیٹوں کے قوانینِ تقسیمی کی پڑتال (Verification of Distributive Laws)

• اگر A, B, C تین سیٹ ہوں تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ یونین کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ تقاطع کہلاتی ہے۔

• اگر A, B, C تین سیٹ ہوں تو $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین کہلاتی ہے۔

مثال 4: پڑتال کریں۔

(i) یونین کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ تقاطع (ii) تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین

جب کہ $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, $B = \{5, 10, 15, \dots, 30\}$ اور $C = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{(i) حل:}$$

$$L.H.S = A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cup (\{5, 10, 15, \dots, 30\} \cap \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cup \{15\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \dots\dots\dots (a)$$

$$R.H.S = A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cup \{5, 10, 15, \dots, 30\}$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 20, 25, 30\}$$

$$\text{اور } A \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 20, 21, 27, 33\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20, 25, 30\} \cap \{1, 2, 3, \dots, 20, 21, 27, 33\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, \dots, 20\} \dots\dots\dots (b)$$

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{(ii)}$$

$$\begin{aligned} L.H.S = A \cap (B \cup C) &= \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cap (\{5, 10, 15, \dots, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}) \\ &= \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cap \{3, 5, 9, 10, 15, 20, 21, 25, 27, 30, 33\} \end{aligned}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 9, 10, 15, 20\} \quad \dots \dots \dots \text{(a)}$$

$$\begin{aligned} R.H.S = A \cap B &= \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cap \{5, 10, 15, \dots, 30\} \\ &= \{5, 10, 15, 20\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{اور } A \cap C &= \{1, 2, 3, \dots, 20\} \cap \{3, 9, 15, 21, 27, 33\} \\ &= \{3, 9, 15\} \end{aligned}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5, 10, 15, 20\} \cup \{3, 9, 15\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 5, 9, 10, 15, 20\} \quad \dots \dots \dots \text{(b)}$$

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



1.2.3 ڈی مورگن کے قوانین (De Morgan's Laws)

اگر A اور B ایک یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہوں تو

$$\text{(ii)} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{(i)} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

مثال 5: ڈی مورگن کے قوانین کی پڑتال کریں جبکہ

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \quad \text{اور} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A = \{2, 4, 6\}$$

$$L.H.S = (A \cup B)^c \quad \text{حل: (i)}$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

$$\therefore (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{8, 9, 10\} \quad \dots \dots \dots \text{(a)}$$

$$R.H.S = A^c \cap B^c$$

$$\begin{aligned} A^c &= U - A \\ &= \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{2, 4, 6\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \end{aligned}$$

$$B^c = U - B$$

$$B^c = \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B^c = \{8, 9, 10\}$$

$$\therefore A^c \cap B^c = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \cap \{8, 9, 10\}$$

$$= \{8, 9, 10\} \quad \dots \dots \dots \text{(b)}$$

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$L.H.S = (A \cap B)^c \quad (ii)$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{2, 4, 6\}$$

$$(A \cap B)^c = U - (A \cap B)$$

$$= \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{2, 4, 6\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$R.H.S = A^c = U - A = \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{2, 4, 6\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B^c = U - B = \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{8, 9, 10\}$$

$$\therefore A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \cup \{8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \quad \dots\dots\dots (b)$$

(a) اور (b) کا موازنہ کرنے سے

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{پس}$$

مشق 1.2

1- پڑتال کریں۔ (a) $A \cup B = B \cup A$ اور (b) $A \cap B = B \cap A$

(i) $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ جبکہ

(ii) $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, $B = \{6, 8, 10, \dots, 20\}$

2- پڑتال کریں۔ (a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$ اور (b) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$

(i) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{b, d, c, f\}$ اور $Z = \{c, f, g, h\}$ جبکہ

(ii) $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $Y = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ اور $Z = \{5, 6, 7, 8\}$

(iii) $X = \{-1, 0, 2, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ اور $Z = \{4, 6, 8, 10\}$

(iv) $X = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$, $Y = \{6, 8, 10, \dots, 20\}$ اور $Z = \{1, 3, 5, 7\}$

3- ثابت کریں۔ اگر $C = \{a, f, c\}$ اور $B = \{b, d, f\}$, $A = \{a, b, c\}$

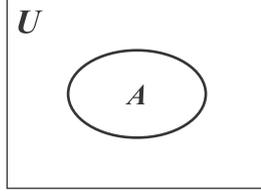
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{تو}$$

4- ثابت کریں۔ اگر $C = \{\}$ اور $B = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$

5- ڈی مارگن کے قوانین کی پڑتال کریں۔ اگر $A = \phi$, $B = P$ اور $U = N$



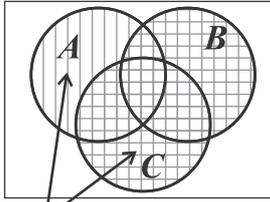
جان وین (1834-1923)، انگریز ریاضی دان جنہوں نے وین اشکال متعارف کرائیں۔



1.3 وین اشکال (Venn Diagrams)

سیٹوں پر عوالم بذریعہ وین اشکال

یونیورسل سیٹ کو مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔
اس کے تحتی سیٹوں کو اس کے اندر کسی بند شکل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
ساتھ دی ہوئی شکل میں $A \subseteq U$ کو وین اشکال کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔



شکل (i) $A \cup (B \cup C)$

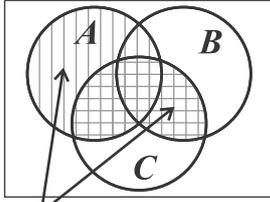
1.3.1 تین متراکب سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے بذریعہ وین اشکال اظہار

$$A \cup (B \cup C) \quad (i)$$

پہلے $B \cup C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cup (B \cup C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں $A \cup (B \cup C)$ میں دوہری لائنوں والا اور اکیلی لائنوں والا حصہ شامل ہے۔



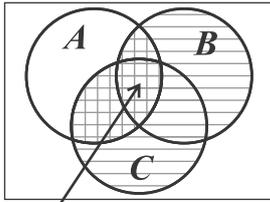
شکل (ii) $A \cup (B \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) \quad (ii)$$

پہلے $B \cap C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cup (B \cap C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں $A \cup (B \cap C)$ میں دوہری لائنوں والا اور اکیلی لائنوں والا حصہ شامل ہے۔



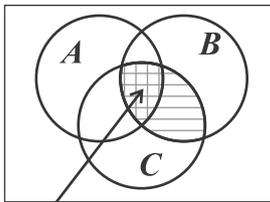
شکل (iii) $A \cap (B \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) \quad (iii)$$

پہلے $B \cup C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cap (B \cup C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں $A \cap (B \cup C)$ میں صرف دوہری لائنوں والا حصہ شامل ہے۔ یعنی چھوٹے ڈبوں سے



شکل (iv) $A \cap (B \cap C)$

$$A \cap (B \cap C) \quad (iv)$$

پہلے $B \cap C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cap (B \cap C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں صرف دوہری لائنوں والا حصہ $A \cap (B \cap C)$ کو ظاہر کرتا ہے۔

1.3.2 وین اشکال کے ذریعے قانونِ تلازم اور تفسیسی کی تصدیق

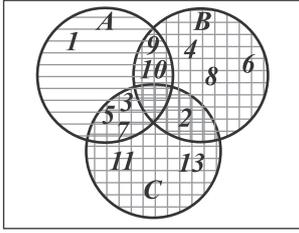
• قوانینِ تلازم

(a) یونین کا قانونِ تلازم

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

جبکہ $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

$$L.H.S = A \cup (B \cap C)$$



شکل (v)

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

$$R.H.S = (A \cup B) \cap C$$

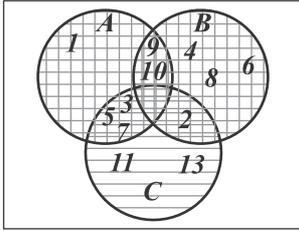
$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

اشکال (v) اور (vi) کا موازنہ کرنے سے یہ واضح ہے کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$



شکل (vi)

(b) تقاطع کا قانونِ تلازم $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

جبکہ $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

$$L.H.S = A \cap (B \cap C)$$

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{2\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2\} = \{ \}$$

افقی لائنیں $B \cap C$ اور عمودی لائنیں $A \cap (B \cap C)$ کو ظاہر کرتی ہیں۔

$$A \cap (B \cap C) = \{ \}$$

$$R.H.S = (A \cap B) \cap C$$

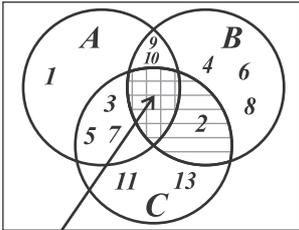
$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{9, 10\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{ \}$$

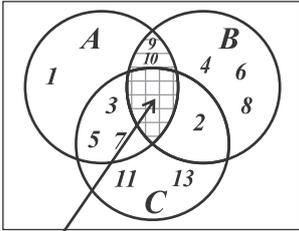
افقی لائنیں $A \cap B$ اور عمودی لائنیں $(A \cap B) \cap C$ کو ظاہر کرتی ہیں۔

شکل (vii) اور (viii) کا موازنہ کرنے سے یہ واضح ہے کہ

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$



شکل (vii) $A \cap (B \cap C)$



شکل (viii) $(A \cap B) \cap C$

• قوانین تقسیمی
(a) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ یونین

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

جبکہ $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ اور $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

$$L.H.S = A \cap (B \cup C)$$

$$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

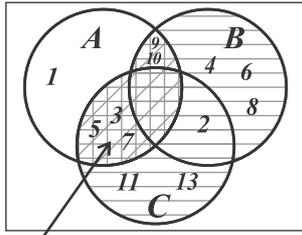
$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$$

$$= \{3, 5, 7, 9, 10\}$$

$B \cup C$ کو افقی لائنیں، $A \cap (B \cup C)$ کو عمودی لائنیں اور $A \cap (B \cup C)$

کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔



$A \cap (B \cup C)$

شکل (ix)

$$R.H.S = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

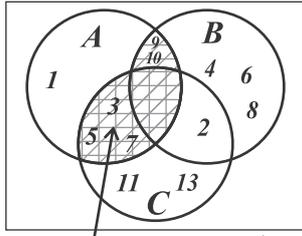
$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{9, 10\}$$

$$A \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{3, 5, 7\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{9, 10\} \cup \{3, 5, 7\} = \{3, 5, 7, 9, 10\}$$

$A \cap B$ کو افقی لائنیں، $A \cap C$ کو عمودی لائنیں اور $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

شکل (x)

اشکال (ix) اور (x) کا موازنہ کرنے سے واضح ہے کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

پس تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ یونین برقرار ہے۔

(b) یونین کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

جبکہ $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

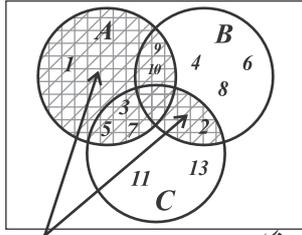
اور $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$L.H.S = A \cup (B \cap C)$$

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{2\}$$

$B \cap C$ کو افقی لائنیں، $A \cup (B \cap C)$ کو عمودی لائنیں اور یوں $A \cup (B \cap C)$

کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔



$A \cup (B \cap C)$

شکل (xi)

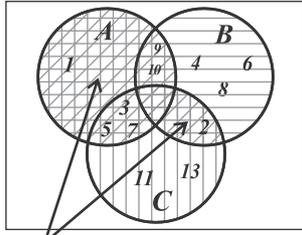
$$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2\}$$

$$= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

$$R.H.S = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

شکل (xii)

$$\begin{aligned}
A \cup C &= \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \\
&= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13\} \\
(A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13\} \\
&= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}
\end{aligned}$$

$A \cup B$ کو افقی لائنیں، $A \cup C$ کو عمودی لائنیں اور یوں $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔

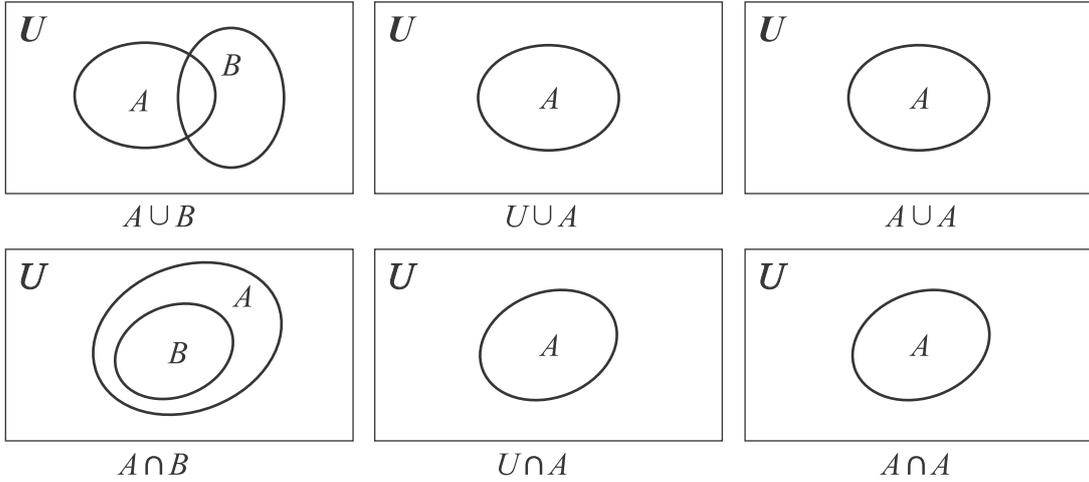
اشکال (xi) اور (xii) کا موازنہ کرنے سے واضح ہے کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ پس یونین کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع برقرار ہے۔

مشق 1.3

1- مندرجہ ذیل سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے قانون مبادلہ کی بذریعہ وین اشکال پڑتال کریں۔

- (i) $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ (ii) سیٹ N اور سیٹ Z
 $B = \{5, 9, 13, 17, 21, 25\}$
 (iii) $C = \{x | x \in N \wedge 8 \leq x \leq 18\}$ (iv) سیٹ E اور سیٹ O
 $D = \{y | y \in N \wedge 9 \leq y \leq 19\}$

2- مندرجہ ذیل اشکال بنا کر اور عوامل جو ہر ایک شکل کے نیچے ہیں کے مطابق سایہ دار کریں۔



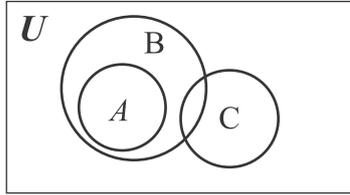
3- دیے ہوئے سیٹوں کی مدد سے مندرجہ ذیل قوانین کی وین اشکال کی مدد سے پڑتال کریں۔

- (i) سیٹوں کے یونین کا قانون تلازم
 (ii) سیٹوں کے تقاطع کا قانون تلازم
 (iii) یونین کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع
 (iv) تقاطع کی خاصیت تقسیمی بلحاظ یونین

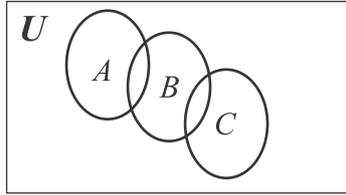
جبکہ (a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ، $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ اور $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

(b) $A = \{x | x \in Z \wedge 8 \leq x \leq 25\}$ ، $B = \{y | y \in Z \wedge -2 < y < 6\}$ اور $C = \{z | z \in Z \wedge z \leq 8\}$

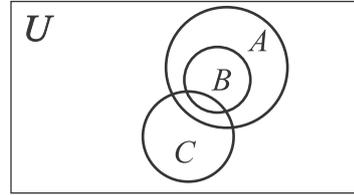
4- نیچے دی گئی وین اشکال بنائیں اور انہیں ہر شکل کے نیچے دیے ہوئے عوائل کے مطابق سایہ دار بنائیں۔



$$(A \cap B) \cup C$$



$$(A \cup B) \cap C$$



$$(A \cap B) \cup C$$

جائزہ مشق 1

1- ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

- (i) اگر سیٹ A کا رکن نہیں تو علامتی طور پر اسے کیسے لکھتے ہیں؟
- (a) $a \in A$ (b) $a \setminus A$ (c) $a \notin A$ (d) $a \cap A$
- (ii) مندرجہ ذیل میں سے کون سا سیٹ نہیں ہے؟
- (a) $\{1, 2, 3\}$ (b) $\{a, b, c\}$ (c) $\{2, 3, 4\}$ (d) $\{1, 2, 3-2\}$
- (iii) سیٹ $\{0\}$ کے تحتی سیٹوں کی تعداد کتنی ہے؟
- (a) ایک (b) دو (c) تین (d) چار
- (iv) X کے تمام تحتی سیٹوں پر مشتمل سیٹ کیا کہلاتا ہے؟
- (a) تحتی سیٹ (b) یونیورسل سیٹ (c) پاور سیٹ (d) سپر/نوٹی سیٹ
- (v) اگر A, B, C اور تین سیٹ ہوں تو $(A \cup B) \cup C$ کس کے برابر ہوگا؟
- (a) $(A \cup B) \cap C$ (b) $(A \cap B)$ (c) $A \cup (B \cup C)$ (d) $(A \cap B) \cap C$
- (vi) اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو $A - B^c$ کس کے برابر ہوگا؟
- (a) $A \cap B^c$ (b) $A^c \cap B$ (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$
- (vii) اگر $A = \{2, 4, 6, \dots, 10\}$ ، $B = \{1, 3, 5, \dots, 9\}$ اور $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ تو سیٹ $(A - B)^c$ کس کے برابر ہوگا؟
- (a) U (b) B (c) A (d) ϕ
- (viii) اگر $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تو سیٹ A کس کے برابر ہوگا؟
- (a) ϕ (b) $\{a\}$ (c) $\{b\}$ (d) $\{a, b\}$
- (ix) اگر ϕ ایک خالی سیٹ ہو تو $(\phi^c)^c$ کس کے برابر ہوگا؟
- (a) X (b) O (c) ϕ (d) $\{0\}$

2- مندرجہ ذیل سوالات کے مختصر جوابات لکھیں۔

- (i) سیٹ کی تعریف کریں۔
- (ii) قدرتی اعداد اور مکمل اعداد میں کیا فرق ہے؟
- (iii) واجب اور غیر واجب تحتی سیٹ کی تعریف کریں۔
- (iv) پاور سیٹ کی تعریف کریں۔
- (v) ڈی مارگن کے قوانین لکھیں۔

3- نیچے دیئے ہوئے سیٹوں کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

$$(i) A = \{e, f, g\} \text{ اور } B = \{1, 3, 5\}$$

$$(ii) \{a, b, c\} \text{ کا پاور سیٹ لکھیں۔}$$

$$(iii) \text{ ڈی مارگن کے قوانین کی پڑتال کریں۔ اگر}$$

$$U = \{a, b, c, d, e\} \text{ اور } B = \{a, b, c\}, A = \{d, e\}$$

خلاصہ

- واضح اشیاء کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔ جن اشیاء پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے۔ وہ اس سیٹ کے ارکان یا ممبران کہلاتے ہیں۔
- سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔ اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو۔
- خالی سیٹ تمام سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔
- اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے اور سیٹ A سیٹ B کے برابر نہیں یعنی سیٹ B کا کم از کم ایک رکن سیٹ A میں نہیں ہے تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ ہے اور اسے علامتی طور پر لکھتے ہیں $A \subset B$ ۔
- دو سیٹوں A اور B کا تقاطع سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A اور سیٹ B کے مشترک ممبران پر مشتمل ہو۔
- دو سیٹوں A اور B کا یونین سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A اور سیٹ B کے تمام ممبران پر مشتمل ہو اور مشترک ممبران صرف ایک دفعہ لکھیں جائیں۔
- اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہوں تو:

$$(i) A \cup B = B \cup A \quad (\text{یونین کا قانون مبادلہ})$$

$$(ii) A \cap B = B \cap A \quad (\text{تقاطع کا قانون مبادلہ})$$

• اگر A, B اور C کوئی تین سیٹ ہوں تو:

$$(i) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{یونین کا قانون تقاطع})$$

$$(ii) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{تقاطع کا قانون یونین})$$

• اگر A, B اور C کوئی تین سیٹ ہوں تو تقسیمی قانون نیچے دیے گئے ہیں:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{یونین کا قانون تقاطع})$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{تقاطع کا قانون یونین})$$

• اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہوں تو ڈی مارگن کے قوانین کے مطابق:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (i)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (ii)$$

• وین اشکال سیٹوں کی تصویری نمائندگی اور ان پر کیے گئے عوامل ہیں۔



اس پونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- غیر ناطق اعداد کی تعریف کر سکیں۔
- ناطق اور غیر ناطق اعداد کی پہچان کر سکیں۔
- حقیقی اعداد کی تعریف کر سکیں۔
- محتم اور غیر محتم کسور کا اظہار بذریعہ متوالی اور غیر متوالی کسور اعشاریہ کر سکیں۔
- کسی عدد کا مکمل مربع معلوم کر سکیں۔
- قدرتی اعداد کے مربعوں کا نمونہ قائم کر سکیں، مثلاً $4^2 = 1+2+3+4+3+2+1$ ۔
- جذر معلوم کرنا بذریعہ مفرد تجزی و تقسیم:
- قدرتی اعداد جیسے 16، 625، 1600 وغیرہ۔
- کسر عام جیسے $\frac{9}{16}$ ، $\frac{36}{49}$ ، $\frac{49}{64}$ وغیرہ۔
- کسر اعشاریہ جو مکمل مربع ہوں 0.01، 1.21، 0.64 وغیرہ۔
- ایسے اعداد کا جذر معلوم کر سکیں جو مکمل مربع نہ ہوں۔ مثلاً 2، 3، 2.5 وغیرہ۔
- کسی عدد کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کر سکیں۔
- اگر مکمل مربع میں ہندسوں کی تعداد "n" ہے تو اس کے جذر میں ہندسوں کی تعداد اس طرح ہوگی:
- ◀ اگر مکمل مربع میں ہندسوں کی تعداد جفت ہے۔ یعنی "n" جفت ہے تو جذر میں ہندسوں کی تعداد $\frac{n}{2}$ ہوگی۔
- ◀ اگر مکمل مربع میں ہندسوں کی تعداد طاق ہے۔ یعنی "n" طاق ہے تو جذر میں ہندسوں کی تعداد $\frac{n+1}{2}$ ہوگی۔
- جذر المربع کے متعلقہ روزمرہ زندگی میں مسائل کا حل کر سکیں۔
- کسی عدد کا مکمل مربع معلوم کر سکیں۔
- مکعب اور جذر المکعب کی پہچان کر سکیں۔
- مکمل مکعب اعداد کا جذر المکعب معلوم کر سکیں۔
- اعداد کے مکعب کی خصوصیات کی پہچان کر سکیں۔

2.1 غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

2.1.1 غیر ناطق اعداد کی تعریف

ایسے اعداد جنہیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ کوئی ناطق عدد ایسا نہیں جس کا مربع 2 ہے۔ اس لیے 2 کا جذر ناطق عدد نہیں ہے۔ اسی طرح $3\sqrt{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{3}$ اور $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ناطق اعداد نہیں ہیں۔ ایسے اعداد کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کے سیٹ کو Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر ناطق اعداد کی تعریف یوں بھی کی جاسکتی ہے کہ اگر انہیں کسور اعشاریہ میں لکھیں تو یہ غیر ختم (non-terminating) ہوں گے اور غیر متوالی کسر اعشاریہ (non-recurring decimal fractions) کی شکل میں ہوں گے۔

2.1.2 ناطق اور غیر ناطق اعداد کی پہچان

ہم ناطق غیر ناطق اعداد کے متعلق پڑھ چکے ہیں۔ اب ہم مثالوں کی مدد سے ان اعداد کی پہچان کرتے ہیں۔

مثال 1: نیچے دیے گئے اعداد میں سے کون سے اعداد ناطق ہیں؟

$$\sqrt{25}, \sqrt{7}, \sqrt{5}, \frac{6}{11}, \sqrt{\frac{16}{25}}, \frac{-7}{9}, \sqrt{9}, \frac{2}{3}$$

حل: $\frac{2}{3}, \sqrt{9}, \frac{-7}{9}, \sqrt{\frac{16}{25}}, \frac{6}{11}$ اور $\sqrt{25}$ ناطق اعداد ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ۔

مثال 2: نیچے دیے گئے اعداد میں سے کون سے اعداد غیر ناطق ہیں؟

$$\sqrt{2}, 1.732050\dots, \sqrt{4}, 2.236067\dots, \sqrt{16}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{25}, \sqrt{37}$$

حل: $\sqrt{2}, 1.732050\dots, 2.236067\dots, \sqrt{17}, \sqrt{19}$ اور $\sqrt{37}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔ ان میں سے ہر ایک کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھا جاسکتا۔ جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ۔

2.1.3 حقیقی اعداد (Real Numbers)

اب ہم حقیقی اعداد کی تعریف کرتے ہیں۔ ”ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کا یونین سیٹ حقیقی اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے“ اور اسے R سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$R = Q \cup Q' \quad \text{یعنی}$$

2.1.4 مختتم اور غیر مختتم کسور کا اظہار بذریعہ متوالی اور غیر متوالی کسور اعشاریہ

• مختتم کسور اعشاریہ (Terminating decimal fraction)

ایسی کسور اعشاریہ جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تعداد متناہی ہو مختتم کسور اعشاریہ کہلاتی ہے یا کسی کسور عام کو کسور اعشاریہ میں تبدیل کیا جائے اور تقسیم کا عمل مکمل ہو جائے تو ایسی کسور کو مختتم کسور اعشاریہ کہتے ہیں۔ ایسی کسور اعشاریہ کو ناطق اعداد کی شکل $\frac{p}{q}$ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ ۔ مثلاً 0.25، 3.125 اور 0.0625 مختتم کسور اعشاریہ کی مثالیں ہیں۔
درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 3: $\frac{9}{4}$ کو کسور اعشاریہ میں تحویل کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 2.25 \\ 4 \overline{)9.00} \\ \underline{-8} \quad \downarrow \\ 10 \quad \downarrow \\ \underline{-8} \quad \downarrow \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 0 \end{array}$$

حل:

$$\frac{9}{4} = 2.25 \quad \text{پس}$$

• غیر مختتم کسور اعشاریہ (متوالی اور غیر متوالی)

(Non-Terminating with Repeating and Non-Repeating Decimal Fraction)

ایسی کسور اعشاریہ جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تعداد لامتناہی ہو غیر مختتم کسور اعشاریہ کہلاتی ہے۔ کسی کسور عام کو کسور اعشاریہ میں تحویل کرتے وقت تقسیم کا عمل ختم نہ ہو اور کسری حصہ میں کوئی بھی ہندسہ بار بار نہ آئے تو ایسی کسور کو غیر مختتم اور غیر متوالی کسور اعشاریہ کہتے ہیں۔

کسور عام کی طرح ناطق اعداد کو بھی کسور اعشاریہ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 5: $\frac{9}{7}$ کو کسر اعشاریہ میں تحويل کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1.28571428\dots \\ 7 \overline{)9.00000000} \\ \underline{-7} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 60 \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-35} \\ 50 \\ \underline{-49} \\ 10 \\ \underline{-7} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 60 \\ \underline{-56} \\ 4 \end{array}$$

مثال 4: $\frac{1}{9}$ کو کسر اعشاریہ میں تحويل کیجیے۔
حل:

$$\begin{array}{r} 0.1111\dots \\ 9 \overline{)1.0000} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 1 \end{array}$$

پس $\frac{1}{9} = 0.1111\dots$ (غیر مختتم اور متوالی)

پس $\frac{9}{7} = 1.28571428\dots$ (غیر مختتم اور متوالی)

ہم دیکھ چکے ہیں کہ مثال 3 میں کسر اعشاریہ 2.25 مختتم ہے اور دو ہندسوں تک کسری حصہ ہے اور مثال 4 میں کسر اعشاریہ $0.1111\dots$ غیر مختتم ہے لیکن ہندسہ "1" بار بار آ رہا ہے۔ لہذا یہ کسر غیر مختتم اور متوالی ہے۔
اب مثال 5 میں کسر اعشاریہ $1.28571428\dots$ مختتم نہیں ہے اور ہندسوں کا سلسلہ جاری رہتا ہے۔ نقاط (\dots) ظاہر کرتے ہیں کہ کسر اعشاریہ غیر مختتم اور متوالی ہے۔

نوٹ: ایسی کسور اعشاریہ جو غیر مختتم اور غیر متوالی ہوں، کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔

مشق 2.1

1- درج ذیل ناطق اعداد کو کسور اعشاریہ میں تبدیل کریں اور مختتم اور غیر مختتم کسور اعشاریہ کو علیحدہ کریں۔

- | | | | | | |
|------|---------------|------|---------------|-------|---------------|
| (i) | $\frac{5}{7}$ | (ii) | $\frac{3}{5}$ | (iii) | $\frac{6}{7}$ |
| (iv) | $\frac{2}{7}$ | (v) | $\frac{3}{8}$ | (vi) | $\frac{8}{5}$ |

2- درج ذیل ناطق اعداد کو کسور اعشاریہ میں تبدیل کریں اور متوالی (Repeating) اور غیر متوالی کسور اعشاریہ کو علیحدہ کریں۔

- | | | | | | | | |
|------|----------------|------|----------------|-------|----------------|--------|-----------------|
| (i) | $\frac{3}{7}$ | (ii) | $\frac{4}{5}$ | (iii) | $\frac{6}{8}$ | (iv) | $\frac{11}{12}$ |
| (v) | $\frac{1}{7}$ | (vi) | $\frac{8}{9}$ | (vii) | $\frac{25}{8}$ | (viii) | $\frac{22}{7}$ |
| (ix) | $\frac{13}{4}$ | (x) | $\frac{21}{6}$ | (xi) | $\frac{29}{2}$ | (xii) | $\frac{10}{3}$ |

2.2 مربعے (Squares)

جب ایک عدد کو اسی عدد سے ضرب دی جائے تو حاصل ضرب اُس عدد کا مربع کہلاتا ہے۔ مثلاً x کا مربع $x \times x = x^2$ ہے۔

$$3 \times 3 = 3^2 = 9 \quad \text{اور}$$

اسے ہم 3 کا مربع 9 پڑھتے ہیں۔

$$5 \times 5 = 5^2 = 25 \quad \text{اسی طرح}$$

یعنی 5 کا مربع 25 ہے۔

2.2.1 کسی عدد کا مکمل مربع معلوم کرنا

قدرتی عدد مکمل مربع کہلاتا ہے بشرطیکہ یہ کسی دوسرے قدرتی عدد کا مربع ہو۔

جیسے عدد 4 ایک مکمل مربع ہے۔ اس لیے کہ $4 = 2^2$

اسی طرح 25 ایک مکمل مربع ہے۔ اس لیے کہ $25 = 5^2$

اب ہم کسی عدد کا مکمل مربع معلوم کرنا سیکھتے ہیں۔

مثال 1: 13 کا مکمل مربع معلوم کریں۔
حل: $13 = 13^2 = 13 \times 13$
 $= 169$

مثال 2: 95 کا مکمل مربع معلوم کریں۔
حل: $95 = (95)^2 = 95 \times 95$
 $= 9025$

2.2.2 قدرتی اعداد کے مربعوں کا نمونہ (Pattern) قائم کرنا

ہم جانتے ہیں کہ $4^2 = 4 \times 4 = 16$
ہم 4 کے مربع کو ایک نمونہ کی شکل میں یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$4^2 = 1+2+3+4+3+2+1=16$$

$$5^2 = 1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 25 \quad \text{اسی طرح}$$

$$6^2 = 1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36 \quad \text{اور}$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ کسی قدرتی عدد کے مربع کو اوپر دیے گئے نمونہ کی مدد سے لکھ سکتے ہیں۔

1^2	1	= 1
2^2	1 + 2 + 1	= 4
3^2	1 + 2 + 3 + 2 + 1	= 9
4^2	1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1	= 16
5^2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 25
6^2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 36
7^2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 49
8^2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 64
9^2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 81
10^2	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	= 100

اوپر دیے گئے نمونہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ:

- (i) ہر قطار 1 سے شروع ہوتی ہے اور 1 پر ہی ختم ہوتی ہے۔
- (ii) ہندسے 1 سے شروع ہو کر بڑھتے بڑھتے اُس عدد تک بڑھتے ہیں جس کا مربع لکھنا ہوتا ہے اور پھر ترتیب سے کم ہوتے ہوتے 1 تک پہنچ جاتے ہیں۔
- (iii) ہر قطار میں ہندسوں کی تعداد 2 کے حساب سے زیادہ ہوتی جاتی ہے۔
- (iv) دو متصلہ مربعوں کا فرق ایک طاق عدد ہوتا ہے۔
- (v) کسی بھی قطار میں ہندسوں (اعداد) کی تعداد برابر ہے وہ عدد جس کا مربع لکھ رہے ہیں اور اس کے پہلے متصلہ عدد کے مجموعہ کے برابر۔

قدرتی اعداد کے مربعوں کا ایک اور نمونہ دیکھیے۔

$$\begin{array}{l}
 1^2 = 1 \\
 2^2 = 1+3 \\
 3^2 = 1+3+5 \\
 4^2 = 1+3+5+7 \\
 5^2 = 1+3+5+7+9 \\
 6^2 = 1+3+5+7+9+11 \\
 7^2 = 1+3+5+7+9+11+13 \\
 8^2 = 1+3+5+7+9+11+13+15 \\
 9^2 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17 \\
 10^2 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = 1 \\
 = 4 \\
 = 9 \\
 = 16 \\
 = 25 \\
 = 36 \\
 = 49 \\
 = 64 \\
 = 81 \\
 = 100
 \end{array}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ:

- (i) جمع میں ترتیب صعودی ہے۔
- (ii) ہر ایک عدد کے مربع کو صرف طاق اعداد کے مجموعے سے لیا گیا ہے۔
- (iii) ہر ایک قطار کی ابتدا طاق عدد 1 سے ہوتی ہے۔
- (iv) ہر قطار میں طاق اعداد کی تعداد متصلہ طاق اعداد کی صورت میں اتنی ہی ہے جس عدد کا مربع لکھا جا رہا ہوتا ہے۔
- (v) ہر قطار میں اعداد کا مجموعہ دیئے ہوئے عدد کے مربع کے برابر ہوتا ہے۔
- (vi) قطار کا آخری طاق عدد وہ عدد ہے جو دیئے ہوئے عدد کو دو گنا کر کے اُس میں 1 تفریق کر دیا جائے۔

مشق 2.2

1- دیئے گئے اعداد میں سے ہر ایک کا مکمل مربع معلوم کیجیے۔

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & 7 & \text{(ii)} & 11 & \text{(iii)} & 19 \\
 \text{(iv)} & 25 & \text{(v)} & 37 & \text{(vi)} & 75
 \end{array}$$

2- نیچے دیئے گئے مربعوں کو جمعی نمونہ کی شکل میں لکھیے۔

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} & 6^2 & \text{(ii)} & 7^2 & \text{(iii)} & 4^2 \\
 \text{(iv)} & 5^2 & \text{(v)} & 3^2 & \text{(vi)} & 8^2
 \end{array}$$

2.3 جذر المربع (Square Root)

2.3.1 (a) قدرتی اعداد (b) کسور عام (c) مکمل مربع کی شکل کی کسور اعشاریہ کا جذر بذریعہ مفرد اجزائے ضربی

اور تقسیم کے طریقہ سے معلوم کرنا

کسی مثبت عدد کا جذر مثبت ہوتا ہے جس کا مربع دیا ہوا عدد ہوتا ہے۔ جذر کے لیے علامت $\sqrt{\quad}$ ہے۔

(a) قدرتی اعداد کا جذر معلوم کرنا

• بذریعہ مفرد اجزائے ضربی

دیئے ہوئے عدد کے مفرد اعداد معلوم کر لیے جاتے ہیں۔ ان کو جوڑوں کی شکل میں لکھا لیا جاتا ہے۔ ہر جوڑے میں سے ایک ایک

عدد لیا جاتا ہے۔ ان تمام مفرد اعداد کو آپس میں ضرب دی جاتی ہے حاصل ضرب مطلوبہ جذر ہوتا ہے۔
مثال 1: 225 کا جذر بذریعہ مفرد تجزیہ معلوم کیجیے۔

3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$\sqrt{225} = \sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5}$$

$$= 3 \times 5$$

$$= 15$$

$$\sqrt{225} = 15 \quad \text{پس}$$

مثال 2: 576 کا جذر بذریعہ مفرد تجزیہ معلوم کیجیے۔

2	576
2	288
2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$576 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$\sqrt{576} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= 24$$

$$\sqrt{576} = 24 \quad \text{پس}$$

مثال 3: 1600 کا جذر بذریعہ مفرد تجزیہ معلوم کیجیے۔

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$1600 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

$$\sqrt{1600} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 40$$

$$\sqrt{1600} = 40 \quad \text{پس}$$

• جذر بذریعہ تقسیم

قدرتی اعداد کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کرنے کے لیے ہمارا عمل اس طرح ہوگا:

- (i) دیے ہوئے عدد کے ہندسوں کے دائیں طرف سے جوڑے بنائیں۔ اگر ہندسوں کی تعداد جفت ہوگی تو جوڑے مکمل بن جائیں گے اور اگر یہ تعداد طاق ہوگی تو عدد کا بائیں طرف کا ہندسہ اکیلا ہی رہے گا۔
- (ii) اب ایسا عدد تلاش کریں جس کا مربع دائیں طرف کے جوڑے (یا اکیلے عدد) کے برابر یا نزدیک ترین ہو اور یہ عدد حاصلی قسمت میں بھی لیا جائے گا۔

(iii) حاصل ضرب کو تفریق کریں اور اگلے جوڑے کو باقی (remainder) کے دائیں طرف لکھیں۔

(iv) حاصل قسمت میں عدد کو دو گنا کریں اور اسے بطور مقسوم علیہ لیں۔

(v) اب ایسا عدد تلاش کریں کہ مقسوم علیہ کے دائیں طرف لکھ کر اس طرح حاصل عدد سے اس نئے عدد کے ساتھ اُسے ضرب دیں کہ مقسوم کے برابر آئے یا نزدیک ترین ہو۔ اس نئے عدد کو حاصل قسمت کے دائیں طرف بھی لکھ لیں۔ یہ سلسلہ جاری رکھیں کہ تمام جوڑے اتر جائیں۔

مثال 4: 625 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 2 \overline{) 625} \\ \underline{4 } \\ 225 \\ \underline{225} \\ 0 \end{array}$$

پس $\sqrt{625} = 25$

مثال 5: 1024 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 32 \\ 3 \overline{) 1024} \\ \underline{9 } \\ 124 \\ \underline{124} \\ 0 \end{array}$$

پس $\sqrt{1024} = 32$

مثال 6: 15129 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 123 \\ 1 \overline{) 15129} \\ \underline{1 } \\ 51 \\ \underline{44 } \\ 729 \\ \underline{729} \\ 0 \end{array}$$

پس $\sqrt{15129} = 123$

مشق 2.3

1- نیچے دیے گئے اعداد کا جذر بذریعہ مفرد تجزیہ معلوم کیجیے۔

(i)	784	(ii)	1225	(iii)	2809	(iv)	4225	(v)	5184
(vi)	7744	(vii)	1296	(viii)	1764	(ix)	29241		

2- نیچے دیے گئے اعداد کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

(i)	13689	(ii)	29241	(iii)	103041
(iv)	418609	(v)	49729	(vi)	55696
(vii)	240100	(viii)	10329796		

(b) کسور عام کا جذر معلوم کرنا

ہم جانتے ہیں $\frac{4}{9}$ میں 4 کو شمار کنندہ اور 9 کو نسب نما کہتے ہیں۔ کسور عام کا جذر معلوم کرنے کے لیے شمار کنندہ کے جذر کو نسب نما کے جذر سے تقسیم کیا جاتا ہے۔

درج ذیل مثالوں کی مدد سے اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

جذر بذریعہ مفرد تجزیہ

مثال 7: $\frac{9}{16}$ کا جذر بذریعہ مفرد تجزیہ معلوم کریں۔
حل:

$$\frac{9}{16} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 3}}{\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2}} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

اب

پس

مثال 8: $1\frac{11}{25}$ کا جذر بذریعہ مفرد تجزیہ معلوم کریں۔
حل:

$$1\frac{11}{25} = \frac{36}{25} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{5 \times 5}$$

$$\sqrt{1\frac{11}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3}}{\sqrt{5 \times 5}} = \frac{2 \times 3}{5}$$

$$\sqrt{1\frac{11}{25}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

اب

پس

• کسور عام کا جذر بذریعہ تقسیم

ہم جانتے ہیں کہ کسور عام کا جذر، اُس کے شمار کنندہ کے جذر کو اُس کے نسب نما کے جذر سے تقسیم کر کے معلوم کیا جاتا ہے۔

مثال 9: $\frac{169}{289}$ کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r} 13 \\ 1 \overline{) 169} \\ \underline{1 } \\ 69 \\ \underline{69} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ 1 \overline{) 289} \\ \underline{1 } \\ 189 \\ \underline{189} \\ 0 \end{array}$$

حل:

$$\sqrt{\frac{169}{289}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{289}}$$

$$= \frac{13}{17}$$

پس $\sqrt{\frac{169}{289}} = \frac{13}{17}$

مثال 10: $9\frac{67}{121}$ کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r} 34 \\ 3 \overline{) 1156} \\ \underline{9 } \\ 256 \\ \underline{256} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ 1 \overline{) 121} \\ \underline{1 } \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

حل:

$$9\frac{67}{121} = \frac{1156}{121}$$

$$\sqrt{9\frac{67}{121}} = \sqrt{\frac{1156}{121}}$$

$$= \frac{\sqrt{1156}}{\sqrt{121}}$$

$$= \frac{34}{11}$$

$$= 3\frac{1}{11}$$

پس $\sqrt{9\frac{67}{121}} = 3\frac{1}{11}$

مشق 2.4

1- درج ذیل کسور عام کا جذر بذریعہ مفرد تجزی معلوم کیجیے۔

(i)	$\frac{49}{64}$	(ii)	$\frac{121}{625}$	(iii)	$\frac{196}{441}$
(iv)	$1\frac{13}{36}$	(v)	$\frac{676}{729}$	(vi)	$12\frac{24}{25}$

2- درج ذیل کسور کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{144}{225}$ (ii) $\frac{169}{256}$ (iii) $\frac{784}{841}$ (iv) $\frac{1024}{1225}$ (v) $5\frac{41}{64}$ (vi) $9\frac{67}{121}$

(c) کسور اعشاریہ کا جذر معلوم کرنا

• بذریعہ مفرد تجزی

ہم کسر اعشاریہ کو کسر عام میں تحويل کر کے جذر معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

مثال 11: 0.64 کا جذر بذریعہ مفرد تجزی معلوم کریں۔ $0.64 = \frac{64}{100}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{64}{100}} &= \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}} \quad \text{اور} \\ &= \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}}{\sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5}} \\ &= \frac{\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}}{\sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5}} \\ &= \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{8}{10} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

$$\sqrt{0.64} = 0.8 \quad \text{پس}$$

مثال 12: 2.25 کا جذر بذریعہ مفرد تجزی معلوم کریں۔

$$\begin{array}{r|l} 3 & 225 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2.25 &= \frac{225}{100} \\ \sqrt{\frac{225}{100}} &= \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5}}{\sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5}} \\ &= \frac{\sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5}}{\sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5}} \\ &= \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{15}{10} \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2.25} = 1.5 \quad \text{پس}$$

• کسرا عشریہ کا جذر بذریعہ تقسیم

کسرا عشریہ کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کرنے کے لیے درج ذیل طریقہ اختیار کیا جائے گا:

- نقطہ عشریہ کے بائیں طرف ہندسوں کے جوڑے دائیں سے بائیں طرف بنائیں۔
- نقطہ عشریہ کے دائیں طرف ہندسوں کے جوڑے بائیں سے دائیں طرف بنائیں۔
- حاصل قسمت میں نقطہ عشریہ لگائیں اور پھر نقطہ عشریہ کے دائیں طرف کے جوڑے اتاریں۔
- دو جوڑے اکٹھے اتارنے کی صورت میں حاصل قسمت میں 0 لگالیں۔

اس طریقہ کی وضاحت مثالوں کی مدد سے کی جاتی ہے۔

مثال 13: 180.9025 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r}
 13.45 \\
 \hline
 1 \quad 180.9025 \\
 \underline{1} \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 23 \quad 80 \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \quad \underline{69} \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 264 \quad 1190 \quad \downarrow \\
 \quad \underline{1056} \quad \downarrow \\
 2685 \quad 13425 \\
 \quad \underline{13425} \\
 \quad \quad 0
 \end{array}$$

$$\sqrt{180.9025} = 13.45 \quad \text{پس}$$

مثال 14: 0.053361 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r}
 0.231 \\
 \hline
 2 \quad 0.053361 \\
 \underline{0} \quad 4 \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 43 \quad 133 \quad \downarrow \\
 \quad \underline{129} \quad \downarrow \\
 461 \quad 461 \\
 \quad \underline{461} \\
 \quad \quad 0
 \end{array}$$

$$\sqrt{0.053361} = 0.231 \quad \text{پس}$$

وضاحت

$$\begin{array}{l}
 1 \times 21 = 21 \\
 2 \times 22 = 44 \\
 3 \times 23 = 69 \\
 4 \times 24 = 96
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \times 261 = 261 \\
 2 \times 262 = 524 \\
 3 \times 263 = 789 \\
 4 \times 264 = 1056 \\
 5 \times 265 = 1325
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \times 2681 = 2681 \\
 2 \times 2682 = 5364 \\
 3 \times 2683 = 8049 \\
 4 \times 2684 = 10736 \\
 5 \times 2685 = 13425
 \end{array}$$

مثال 15: 152.7696 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r}
 12.36 \\
 \hline
 1 \overline{) 152.7696} \\
 \underline{1} \\
 52 \\
 \underline{44} \\
 876 \\
 \underline{729} \\
 14796 \\
 \underline{14796} \\
 0
 \end{array}$$

$$\sqrt{152.7696} = 12.36 \quad \text{پس}$$

مشق 2.5

1- درج ذیل کسور اعشاریہ کا جذر بذریعہ مفرد تجزی معلوم کیجیے۔

- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| (i) 1.21 | (ii) 0.64 | (iii) 7.29 |
| (iv) 1.44 | (v) 1.69 | (vi) 12.25 |

2- درج ذیل کسور اعشاریہ کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

- | | | |
|-------------------|-------------------|----------------|
| (i) 0.3249 | (ii) 0.5184 | (iii) 10.24 |
| (iv) 20.5209 | (v) 648.7209 | (vi) 2981.16 |
| (vii) 7613.609536 | (viii) 0.00868624 | (ix) 2374.6129 |

2.3.2 ایک ایسے عدد کا جذر معلوم کرنا جو مکمل مربع نہیں ہے۔

مثال 16: 2 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r}
 1.414 \\
 \hline
 1 \overline{) 2.000000} \\
 \underline{1} \\
 100 \\
 \underline{96} \\
 400 \\
 \underline{281} \\
 11900 \\
 \underline{11296} \\
 604 \\
 \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

$$\sqrt{2} = 1.414 \dots \text{ پس}$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ جذر نکالنے کا عمل جاری رہتا ہے۔ یوں ہم باقی کے طور پر صفر حاصل نہیں کر پائیں گے۔ خارج قسمت میں فقط اعشاریہ کے بعد آنے والے ہندسوں میں کوئی بھی ہندسہ بار بار نہیں آ رہا۔ جیسا کہ ناطق اعداد میں ہوتا ہے۔

$$\frac{2}{3} = 0.666 \quad \text{اور} \quad \frac{7}{9} = 0.777$$

یاد رکھیے:

اگر ہم ایسا عدد معلوم نہ کر سکیں جس کا مربع x ہو تو \sqrt{x} ایک غیر ناطق عدد ہوگا۔

مثال 17: 2.5 کا جذر بذریعہ تقسیم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 1.58 \\ 1 \overline{) 2.50 \overline{00} 00} \\ \underline{1} \\ 150 \\ \underline{1} \\ 2500 \\ \underline{2464} \\ 3600 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

پس $\sqrt{2.5} \cong 1.58$

ایسی صورت میں جذر معلوم کرتے وقت چند درجہ اعشاریہ تک عمل کو محدود کر دیا جاتا ہے۔ یہاں دو درجہ اعشاریہ تک عمل محدود کر دیا گیا ہے۔

مثال 18: 0.257960 کا جذر تین درجہ اعشاریہ تک معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r} 0.507 \\ 5 \overline{) 0.257960} \\ \underline{25} \\ 7960 \\ \underline{7049} \\ 911 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

پس $\sqrt{0.257960} \cong 0.507$

مشق 2.6

1- درج ذیل اعداد کا جذر تین درجہ اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

- | | | |
|--------|--------|---------|
| (i) 2 | (ii) 3 | (iii) 5 |
| (iv) 7 | (v) 11 | (vi) 15 |

2- درج ذیل اعداد کا جذر دو درجہ اعشاریہ تک معلوم کیجیے۔

- | | | |
|------------|-------------|-------------|
| (i) 3.6 | (ii) 6.4 | (iii) 28.9 |
| (iv) 63.34 | (v) 816.081 | (vi) 36.008 |

2.3.3 ایک مکمل مربع کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کرنے کے لیے کلیہ کا استعمال

کلیہ (Rule): فرض کریں مکمل مربع میں ہندسوں کی تعداد n ہے تو اس کے جذر میں ہندسوں کی تعداد اس کلیہ یا قانون کے مطابق معلوم کرتے ہیں۔

(i) اگر n جفت ہے تو ہندسوں کی تعداد $\frac{n}{2}$ ہے۔

(ii) اگر n طاق ہے تو ہندسوں کی تعداد $\frac{n+1}{2}$ ہے۔

اب ہم اس قانون کا اطلاق مثالوں کو حل کر کے کرتے ہیں۔

مثال 19: 49729 کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں۔

حل: عدد = 49729

عدد میں ہندسوں کی تعداد $(n) = 5$

عدد 5 ایک طاق عدد ہے۔ اس لیے 49729 کے جذر میں ہندسوں کی تعداد $3 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2}$ ہوگی۔
جواب کی پڑتال کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 223 \\
 2 \overline{) 49729} \\
 \underline{4} \\
 97 \\
 \underline{84} \\
 1329 \\
 \underline{1329} \\
 0
 \end{array}$$

یوں $\sqrt{49729} = 223$ اور جذر میں ہندسوں کی تعداد 3 ہے۔

مثال 20: 10329796 کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں۔

$$\text{حل: عدد} = 10329796$$

$$\text{عدد میں ہندسوں کی تعداد } (n) = 8$$

عدد 8 ایک جفت عدد ہے۔ اس لیے اس عدد کے جذر میں ہندسوں کی تعداد $4 = \frac{8}{2} = \frac{n}{2}$ ہوگی۔
اب ہم اس کی تصدیق کرنے کے لیے 10329796 کا جذر معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 3214 \\ 3 \overline{) 10329796} \\ \underline{9} \\ 132 \\ \underline{124} \\ 897 \\ \underline{641} \\ 25696 \\ \underline{25696} \\ 0 \end{array}$$

یوں $\sqrt{10329796} = 3214$ اور جذر میں ہندسوں کی تعداد 4 ہے۔

مشق 2.7

1- نیچے دیے گئے مکمل مربعوں کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں اور تصدیق بھی کریں۔

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| (i) 63504 | (ii) 66564 | (iii) 50625 |
| (iv) 837225 | (v) 839056 | (vi) 1054729 |
| (vii) 1577536 | (viii) 2119936 | (ix) 3283344 |
| (x) 614656 | (xi) 7778521 | (xii) 12880921 |

2.3.4 جذر سے متعلقہ روزمرہ زندگی میں مسائل

مثال 21: 1225 طلبہ قطاروں میں اس طرح کھڑے ہوتے ہیں کہ ایک قطار میں اتنے ہی طلبہ ہیں جتنی قطاروں کی تعداد ہے۔ بتائیے ایک قطار میں کتنے طلبہ ہیں؟

حل: چونکہ ایک قطار میں اتنے ہی طلبہ ہیں جتنی قطاروں کی تعداد ہے۔ اس لیے 1225 کا جذر معلوم کیا جائے گا۔

$$\begin{array}{r} 35 \\ 3 \overline{) 1225} \\ \underline{9} \\ 325 \\ \underline{325} \\ 0 \end{array}$$

پس $= 35$ ہر ایک قطار میں طلبہ کی تعداد

مثال 22: ایک مستطیلی کھیت کا رقبہ 18432 مربع میٹر ہے۔ اس کی چوڑائی، لمبائی کا نصف ہے۔ اس کا احاطہ معلوم کریں۔
حل: چونکہ مستطیلی کھیت کی چوڑائی، اس کی لمبائی کا نصف ہے اس لیے اسے دو مساوی مربعی علاقوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{اس لیے:} \quad \text{ہر ایک مربعی علاقہ کا رقبہ} &= \frac{18432}{2} \\ &= 9216 \text{ مربع میٹر} \end{aligned}$$

مربع کے ضلع کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے 9216 کا جذر لیتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 96 \\ 9 \overline{) 9216} \\ \underline{81} \quad \downarrow \\ 1116 \\ \underline{1116} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{مربع کے ضلع کی لمبائی} &= 96 \text{ میٹر} \\ \text{مستطیل کی چوڑائی} &= 96 \text{ میٹر} && \text{یوں} \\ \text{مستطیل کی لمبائی} &= 2 \times 96 \text{ میٹر} && \text{اور} \\ &= 192 \text{ میٹر} \\ \text{مستطیل کا احاطہ} &= 2 (96 + 192) \\ &= 2 (288) = 576 \text{ میٹر} \end{aligned}$$

مثال 23: وہ چھوٹے سے چھوٹا عدد معلوم کریں جسے 58780 سے تفریق کیا جائے کہ باقی مکمل مربع ہو۔
حل: ہم 58780 کا جذر معلوم کرتے ہیں اور باقی بچنے والا عدد ہی مطلوبہ عدد ہوگا۔

$$\begin{array}{r} 242 \\ 2 \overline{) 58780} \\ \underline{4} \quad \downarrow \\ 187 \\ \underline{176} \quad \downarrow \\ 1180 \\ \underline{964} \\ 216 \end{array}$$

216 تفریق کرنے سے حاصل تفریق مکمل مربع ہوگا۔

$$\text{یوں} \quad 58780 - 216 = 58564 \text{ مکمل مربع ہے۔}$$

مشق 2.8

- 1- ایک مربعی کھیت کا رقبہ 14400 مربع میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔
- 2- ایک مربعی کھیت کا رقبہ 422500 مربع میٹر ہے۔ اس کے گرد باڑ لگانے کے لیے کتنی لمبی درکار ہوگی؟

- 3- ایک باغبان 122500 درخت اس طرح لگانا چاہتا ہے کہ ہر ایک قطار میں اُتے ہی درخت ہوں جتنی قطاریں ہوں۔ بتائیے وہ ہر ایک قطار میں کتنے درخت لگائے گا؟
- 4- ایک مستطیلی کھیت کا رقبہ 10092 مربع میٹر ہے۔ اُس کی لمبائی، چوڑائی کا تین گنا ہے۔ اس کا احاطہ معلوم کریں۔
- 5- ایک دائرونی علاقہ کا رقبہ 616 مربع ڈیسی میٹر ہے۔ اس کا رداس (radius) معلوم کریں۔ $\left(\pi \cong \frac{22}{7}\right)$
- 6- ایک مستطیلی کھیت کا رقبہ 28800 مربع میٹر ہے۔ اس کی لمبائی، چوڑائی سے دوگنی ہے۔ اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔
- 7- 109087 میں سے کون سا چھوٹے سے چھوٹا عدد تفریق کیا جائے کہ باقی عدد مکمل مربع ہو؟
- 8- ایک دائرونی کھیت کو ہموار کروانے کا خرچہ بحساب 2 روپے فی مربع میٹر 4928 روپے ہے۔ اس کھیت کا رداس معلوم کریں۔
- 9- ایک مربع کھیت میں بحساب 2 روپے فی 100 مربع میٹر میں ہل چلانے کا خرچہ 2450 روپے ہے۔ کھیت کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔
- 10- ایک مربعی گھاس کے میدان کا رقبہ 62500 مربع میٹر ہے۔ اس کے گرد لکڑی کی باڑ لگانا ہے۔ کتنی لمبی باڑ ہوگی؟ 50 روپے فی میٹر کے حساب سے اس پر کتنی لاگت آئے گی؟

2.4 مکعب اور جذر المکعب (Cubes and Cube-roots)

2.4.1 مکعب اور مکمل مکعب کی پہچان

• مکعب (Cube)

کسی عدد کے مکعب سے مراد یہ ہے کہ اُس عدد کو اُسی سے تین دفعہ ضرب دی جائے۔ فرض کریں وہ عدد x ہے۔

$$x \times x \times x = x^3 \text{ تو}$$

مثال کے طور پر:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 \text{ وغیرہ}$$

• مکمل مکعب (Perfect Cube)

اگر ایک صحیح عدد کو آپس میں تین دفعہ ضرب دی جائے تو حاصل ضرب عدد مکمل مکعب ہوگا۔ یعنی کسی صحیح عدد کی تیسری قوت مکمل مکعب ہوتی ہے۔

مثال 1: دیکھیے کیا 8، 27 اور 216 مکمل مکعب ہیں؟

حل: 27، 8 اور 216

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

یوں 8 مکمل مکعب ہے 2 کا

$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

27 بھی مکمل مکعب ہے 3 کا

$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

اور

$$= 2^3 \times 3^3$$

$$= (2 \times 3)^3 = 6^3$$

اس طرح 216 بھی مکمل مکعب ہے 6 کا

مثال 2: 1.2 کا مکمل مکعب معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } (1.2)^3 &= (1.2) \times (1.2) \times (1.2) \\ &= (1.44) \times (1.2) \\ &= 1.728 \end{aligned}$$

2.4.2 مکمل مکعب عددوں کا جذر المکعب معلوم کرنا

ریاضی میں کسی عدد کے جذر المکعب کو $x^{1/3}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ $x^{1/3}$ ایک ایسا عدد ہے کہ $a^3 = x$ یعنی $a = x^{1/3}$ جذر المکعب کے لیے علامت $\sqrt[3]{\quad}$ ہے۔ یاد رہے کہ یہاں 3 علامت کا حصہ ہے۔

مثال 3: 125 کا جذر المکعب معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } \sqrt[3]{125} &= \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} = 5^3 \\ \sqrt[3]{125} &= \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5} \\ &= (5^3)^{1/3} \\ \sqrt[3]{125} &= 5 \quad \text{پس} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 1 \ 2 \ 5 \\ \underline{5 \ 2 \ 5} \\ 5 \ 5 \\ \underline{ } \\ 1 \end{array}$$

مثال 4: 9261 کا جذر المکعب معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } \sqrt[3]{9261} &= \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7} \\ &= 3^3 \times 7^3 \\ \sqrt[3]{9261} &= \sqrt[3]{3^3 \times 7^3} \\ &= (3^3 \times 7^3)^{1/3} \\ &= (3^3)^{1/3} \times (7^3)^{1/3} \\ &= 3 \times 7 \\ \sqrt[3]{9261} &= 21 \quad \text{پس} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 9 \ 2 \ 6 \ 1 \\ \underline{3 \ 3 \ 0 \ 8 \ 7} \\ 3 \ 1 \ 0 \ 2 \ 9 \\ \underline{7 \ 3 \ 4 \ 3} \\ 7 \ 4 \ 9 \\ \underline{7 \ 7} \\ 1 \end{array}$$

2.4.3 اعداد کے مکعب کے خواص کی پہچان

- (i) مثبت عدد کا مکعب مثبت عدد ہوتا ہے۔ مثلاً $3^3 = 27$
(ii) منفی عدد کا مکعب منفی ہوتا ہے۔ مثلاً $(-4)^3 = -64$
(iii) جفت عدد کا مکعب جفت عدد ہوتا ہے۔ مثلاً $6^3 = 216$
(iv) طاق عدد کا مکعب طاق عدد ہوتا ہے۔ مثلاً $7^3 = 343$
(v) ضرب اور تقسیم کے لحاظ سے مکعب کی خاصیت تقسیمی۔ مثلاً
(a) $(5 \times 7)^3 = 5^3 \times 7^3$ (b) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$
(vi) مکعب سے حاصل اعداد مکمل مکعب ہوتے ہیں۔ مثلاً

$$8^3 = 512, \quad 4^3 = 64, \quad 6^3 = 216$$

یوں 216، 64 اور 512 مکمل مکعب ہیں۔

مشق 2.9

1- نیچے دیے گئے اعداد میں سے مکمل مکعب اعداد کون کون سے ہیں؟

- (i) 512 (ii) 1100 (iii) 6859
 (iv) 729 (v) $\frac{1000}{125}$
- 2- درج ذیل اعداد کا جذر المکعب معلوم کریں۔
 (i) 729 (ii) 15625 (iii) 13824
- 3- درج ذیل کا مکعب معلوم کریں۔
 (i) 1.4 (ii) 0.4 (iii) 0.8
- 4- درج ذیل کا جذر المکعب معلوم کریں۔
 (i) $\frac{27}{216}$ (ii) 35937 (iii) 3375

جائزہ مشق 1

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

- (i) حقیقی اعداد کن اعداد پر مشتمل ہوتے ہیں؟
 (a) ناطق اور غیر ناطق اعداد کا فرق (b) ناطق اور غیر ناطق اعداد کا تقاطع سیٹ
 (c) ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین سیٹ (d) قدرتی اعداد کے سیٹ کا کمپلیمنٹ سیٹ
- (ii) $\sqrt{81}$ کے متعلق کون سا بیان درست نہیں ہے؟
 (a) ناطق عدد (b) مکمل عدد (c) ناطق عدد (d) غیر ناطق عدد
- (iii) کون سا عدد مکمل مربع ہے؟
 (a) 25.6 (b) 0.256 (c) 2.56 (d) 2560
- (iv) 0.9 کا مربع کس کے برابر ہے؟
 (a) 0.81 (b) 8.10 (c) 0.081 (d) 81.0
- (v) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = ?$
 (a) $\frac{49}{6}$ (b) $\frac{7}{81}$ (c) $\frac{49}{81}$ (d) $\frac{7}{3}$
- (vi) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = ?$
 (a) 8^2 (b) 9^2 (c) 65 (d) 81

(vii) اگر ایک مربع کے ضلع کی لمبائی 0.5 میٹر ہو تو اس کا رقبہ کیا ہوگا؟

- (a) $0.50m^2$ (b) $2.5m^2$ (c) $.25m^2$ (d) $25m^2$

$$\sqrt{.04} = ? \text{ (viii)}$$

- (a) .02 (b) 2.0 (c) 0.2 (d) 20

$$\sqrt{1^2 \times 4^2} = ? \text{ (ix)}$$

- (a) 4 (b) 14 (c) 41 (d) 2

$$\sqrt[3]{216} = ? \text{ (x)}$$

- (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = ? \text{ (xi)}$$

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = ? \text{ (xii)}$$

- (a) $\frac{a}{b}$ (b) ab (c) $\sqrt{\frac{b}{a}}$ (d) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

2- نیچے دیے ہوئے اعداد کے جذر میں ہندسوں کی تعداد معلوم کریں اور جذر بھی معلوم کریں۔

- (a) 418609 (b) 30349081 (c) 10329796

3- درج ذیل اعداد کا جذر معلوم کریں۔

- (a) $28\frac{4}{9}$ (b) $17\frac{128}{289}$ (c) $101\frac{92}{169}$
 (d) 0.053361 (e) 0.204304 (f) 152.7696
 (g) 0.25694 (h) 38.01 (i) 64.31

4- ایک مربعی کھیت کا رقبہ 161604 مربع میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

5- سعیدہ کے پاس 196 پتھر کی گولیاں ہیں۔ وہ انہیں مربعی شکل میں رکھتی ہے۔ بتائیے ہر ایک قطار میں کتنی گولیاں ہوں گی؟

6- درج ذیل اعداد کے جذر المکعب معلوم کیجیے۔

- (a) 1728 (b) 3375 (c) $\frac{216}{125}$

خلاصہ

- ایسا عدد جسے $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جائے جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ تو وہ غیر ناطق عدد ہے۔
- حقیقی اعداد کا سیٹ، ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین سیٹ ہے۔ یعنی $R = Q \cup Q'$
- ایک عدد جسے کسر اعشاریہ میں ظاہر کیا جائے کہ وہ غیر مختتم اور متوالی شکل میں ہو تو اسے ناطق عدد کہتے ہیں۔
- ایک کسر اعشاریہ جس میں نقطہ اعشاریہ کے دائیں طرف ہندسوں کی تعداد محدود ہو کو مختتم کسر اعشاریہ کہتے ہیں۔
- ایک کسر اعشاریہ جس میں کسری حصہ میں ہندسوں کی تعداد لامحدود ہو غیر مختتم کسر اعشاریہ کہلاتی ہے۔
- ایک عدد اور اسی عدد کا حاصل ضرب اس کا مربع کہلاتا ہے۔
- ایک مثبت عدد کا جذر المربع ایک ایسا مثبت عدد ہوتا ہے جس کا مربع دیا ہوا عدد ہوتا ہے۔
- کسی عدد کے مکعب سے مراد ایسا عدد ہے جسے آپس میں تین دفعہ ضرب دے کر حاصل کیا جاتا ہے۔



اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- عددی نظام کے اساس کی پہچان کر سکیں۔
- اساس 2، 5، 8 اور 10 کے عددی نظام کی تعریف کر سکیں۔
- بیان/وضاحت کر سکیں:
- ثنائی نظام (اساس 2 کا نظام)
- اساس 5 کا نظام
- اساس 8 کا نظام
- اساس 10 کا نظام (اعشاری نظام)
- اعشاری نظام میں دیے گئے عدد کو اساس 2، 5، 8 اور 10 کے نظام میں تھویل کر سکیں اور اس کے برعکس عمل کر سکیں۔
- اساس 2، 5، 8 اور 10 میں اعداد کو جمع، تفریق اور ضرب دے سکیں۔
- مختلف اساس میں دیے گئے اعداد کو جمع، تفریق اور ضرب دے سکیں۔

3.1 عددی نظامات (Number Systems)

کسی بھی عدد کو 10 ہندسوں کی مدد سے لکھا جاسکتا ہے۔ یعنی 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9، وہ دس ہندسے ہیں انہیں عددی علامات کہتے ہیں اور یہ عربی علامات ہیں۔

3.1.1 عددی نظام کی اساس (Base of Number System)

کسی بھی عددی نظام میں جتنے ہندسے استعمال ہوتے ہیں وہ اس کی اساس کہلاتی ہے۔ اگر ایک عددی نظام میں دو ہندسے 0, 1 استعمال ہوتے ہیں تو اس کی اساس 2 ہے اور وہ عددی نظام جس میں 10 ہندسے استعمال ہوتے ہیں اس کی اساس 10 ہے۔ اسی طرح وہ عددی نظام جس میں ہندسے 0, 1, 2, 3, 4 استعمال ہوتے ہیں اس کی اساس 5 ہے۔

3.1.2 اساس 2، 5، 8 اور 10 کے عددی نظام کی تعریف

(a) ثنائی نظام (اساس دو کا نظام) (Number System with Base 2)

ایسا عددی نظام جو دو ہندسوں 0, 1 سے بنتا ہے ثنائی نظام کہلاتا ہے۔ اور اس کی اساس 2 ہے۔ بظاہر یہ عددی نظام روزمرہ زندگی میں استعمال نہیں ہوتا۔ لیکن یہ عددی نظام بہت ہی مفید ہے اس لیے کہ یہ ہر قسم کے کمپیوٹر میں استعمال ہوتا ہے۔ کمپیوٹر تمام معلومات ثنائی نظام میں جمع کرتا ہے۔ اس لیے یہ نظام موجودہ دور میں بہت ہی اہم ہے۔

(b) اساس پانچ کا نظام (Number System with Base 5)

اس عددی نظام میں پانچ ہندسے 0, 1, 2, 3, 4 استعمال ہوتے ہیں۔ بڑے سے بڑا ہندسہ 4 ہے۔

(c) اساس آٹھ کا نظام (Number System with Base 8)

اس عددی نظام میں آٹھ ہندسے 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 استعمال ہوتے ہیں۔ بڑے سے بڑا ہندسہ 7 ہے۔

(d) اعشاری عددی نظام (Decimal Number System)

دنیا میں سب سے زیادہ استعمال ہونے والا عددی نظام اعشاری عددی نظام ہے اور یہ بہت ہی مقبول عددی نظام ہے اس میں دس ہندسے 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 استعمال ہوتے ہیں۔ اس عددی نظام میں اعداد کو 10 کی قوت کے عدادوں کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔

3.2 تحویلات (Conversions)

اوپر دیے گئے عددی نظاموں میں مقامی قیمت کا استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک عددی نظام میں لکھے گئے عدد کو دوسرے عددی نظام میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کے لیے مسلسل تقسیم کا طریقہ استعمال کیا جاتا ہے اور عددی نظام کے اساس پر بار بار تقسیم کیا جاتا ہے۔

3.2.1(a) اعشاری نظام سے کسی بھی دوسرے عددی نظام میں تحویل کرنا

(i) اعشاری نظام کو ثنائی نظام میں تحویل کرنا

مثال 1: 15 کو اساس 2 کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 15 \\ \hline 2 & 7 - 1 \uparrow \\ \hline 2 & 3 - 1 \\ \hline & 1 - 1 \rightarrow \end{array}$$

پس $15 = (1111)_2$

اس عدد کو ہم اس طرح پڑھیں گے: ایک، ایک، ایک، ایک اساس 2

مثال 2: 541 کو اساس 2 کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 541 \\ \hline 2 & 270 - 1 \uparrow \\ \hline 2 & 135 - 0 \\ \hline 2 & 67 - 1 \\ \hline 2 & 33 - 1 \\ \hline 2 & 16 - 1 \\ \hline 2 & 8 - 0 \\ \hline 2 & 4 - 0 \\ \hline 2 & 2 - 0 \\ \hline & 1 - 0 \rightarrow \end{array}$$

پس $541 = (1000011101)_2$

(ii) اعشاری نظام کو اساس 5 کے عددی نظام میں تحویل کرنا

اعشاری نظام میں لکھے گئے کسی بھی عدد کو اساس پانچ کے عددی نظام میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 3: 17 کو اساس 5 کے مترادف عدد میں تحویل کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 17 \\ \hline & 3 - 2 \rightarrow \end{array}$$

پس $17 = (32)_5$

مثال 4: 89651 کو اساس 5 کے مترادف عدد میں تھویل کریں۔

حل:

5	89651
5	17930 - 1
5	3586 - 0
5	717 - 1
5	143 - 2
5	28 - 3
5	5 - 3
	1 - 0

پس $89751 = (10332101)_5$

(iii) اعشاری نظام کو اساس 8 کے نظام میں تھویل کرنا

مثال 5: 824 کو اساس 8 کے مترادف عدد میں تھویل کریں۔

حل:

8	824
8	103 - 0
8	12 - 7
	1 - 4

پس $824 = (1470)_8$

مثال 6: 4837 کو اساس 8 کے مترادف عدد میں تھویل کریں۔

حل:

8	4837
8	604 - 5
8	75 - 4
8	9 - 3
8	1 - 1

پس $4837 = (11345)_8$

3.2.1(b) دوسرے نظاموں کو اعشاری نظام میں تھویل کرنا

(i) ثنائی نظام کو اعشاری نظام میں تھویل کرنا

اعداد کو ثنائی نظام سے اعشاری نظام میں تھویل کرنے کی وضاحت مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 7: $(1101)_2$ کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

$$\begin{aligned} (1101)_2 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 8 + 4 + 0 + 1 = 13 \end{aligned}$$

(ii) اساس 5 میں لکھے اعداد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا

اساس 5 میں لکھے گئے کسی بھی عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔ اس کی وضاحت مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 8: $(413242)_5$ کو اعشاری نظام کے مترادف عدد میں تبدیل کریں۔

$$\begin{aligned} (413242)_5 &= 4 \times 5^5 + 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0 \\ &= 4 \times 3125 + 1 \times 625 + 3 \times 125 + 2 \times 25 + 4 \times 5 + 2 \times 1 \\ &= 12500 + 625 + 375 + 50 + 20 + 2 \\ &= 13572 \end{aligned}$$

(iii) اساس 8 میں لکھے گئے اعداد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا

درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 9: درج ذیل اساس 8 (Octal) اعداد کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

(i) $(126)_8$ (ii) $(424002)_8$

(i) $(126)_8$ حل:

$$\begin{aligned} (126)_8 &= 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 6 \times 8^0 \\ &= 1 \times 64 + 2 \times 8 + 6 \times 1 \\ &= 64 + 16 + 6 = 86 \end{aligned}$$

(ii) $(424002)_8$

$$\begin{aligned} (424002)_8 &= 4 \times 8^5 + 2 \times 8^4 + 4 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 2 \times 8^0 \\ &= 4 \times 32768 + 2 \times 4096 + 4 \times 512 + 0 + 0 + 2 \times 1 \\ &= 131072 + 8192 + 2048 + 0 + 0 + 2 \\ &= 141314 \end{aligned}$$

مشق 3.1

1- درج ذیل اعداد کو اعشاری نظام میں تبدیل کریں۔

(i) $(101)_2$

(ii) $(2044)_5$

(iii) $(1101110)_2$

(iv) $(7016)_8$

(v) $(2360)_8$

(vi) $(1011010100)_2$

(vii) $(1001001)_2$

(viii) $(3100)_5$

2- ہر سوال کو دیے گئے عددی نظام میں تحویل کریں۔

اشارہ: پہلے اعشاری نظام میں تحویل کریں اور پھر متعلقہ نظام میں تحویل کریں۔

(i) 3025_8 کو ثنائی، اساس 8 اور اساس 5 میں تحویل کریں۔

(ii) $(671)_8$ کو ثنائی اور اساس 5 میں تحویل کریں۔

(iii) $(2006)_8$ کو ثنائی اور اساس 5 میں تحویل کریں۔

(iv) 867_8 کو ثنائی، اساس 8 اور اساس 5 میں تحویل کریں۔

(v) $(10011001)_2$ کو اساس 8 اور اساس 5 میں تحویل کریں۔

3.2.2 اساس 2 میں اعداد کی جمع، تفریق اور ضرب

(a) ثنائی نظام (اساس 2 کا نظام)

جمع (Addition): ہم جانتے ہیں کہ ثنائی نظام میں صرف دو ہندسے 0 اور 1 استعمال ہوتے ہیں۔ جمع کرتے وقت اگر مجموعہ ایک سے زیادہ آجاتا ہے تو مجموعہ کو 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔ باقی کو لکھ لیا جاتا ہے اور حاصل قسمت کو آگے لے جایا جاتا ہے۔

ثنائیی نظام میں جمع کرتے وقت درج ذیل جدول مددگار ثابت ہو سکتا ہے۔

ثنائیی نظام میں جمع کا جدول

+	0	1
0	0	1
1	1	$(10)_2$

مثال 10: $(111)_2$ اور $(10)_2$ کو جمع کیجیے۔

حل: افقی شکل میں: $(111)_2 + (10)_2 = (1001)_2$

اور عمودی شکل میں:

$$\begin{array}{r} (111)_2 \\ + (10)_2 \\ \hline (1001)_2 \end{array}$$

دوسرے کالم میں $1+1=2$ ہے اور $2=(10)_2$ اس لیے ہم 1 کو اگلے کالم میں لے جاتے ہیں اور وہاں $1+1$ کو $(10)_2$ لکھتے ہیں۔

مثال 11: حل کریں۔ $(10110111)_2 + (100011)_2$

حل: افقی شکل میں: $(10110111)_2 + (100011)_2 = (11011010)_2$

اور عمودی شکل میں:

$$\begin{array}{r} (10110111)_2 \\ + (100011)_2 \\ \hline (11011010)_2 \end{array}$$

تفریق (Subtraction):

مثال 12: $(101)_2 - (11)_2$ کو حل کریں۔حل: $(101)_2 - (11)_2$

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \\ (101)_2 \\ - (11)_2 \\ \hline (100)_2 \end{array}$$

$$(101)_2 - (11)_2 = (10)_2 \quad \text{پس}$$

مثال 13: $(10011)_2$ میں سے $(1101)_2$ تفریق کریں۔حل: $(10011)_2 - (1101)_2$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \textcircled{2} \textcircled{2} \\ (10011)_2 \\ - (1101)_2 \\ \hline (110)_2 \end{array}$$

$$(10011)_2 - (1101)_2 = (110)_2 \quad \text{پس}$$

ضرب (Multiplication):

اساس 2 کے نظام میں ضرب کا جدول

×	0	1
0	0	0
1	0	1

مثال 14: $(11)_2$ کو $(10)_2$ سے ضرب دیں۔حل: $(11)_2 \times (10)_2$

$$\begin{array}{r} (11)_2 \\ \times (10)_2 \\ \hline (00)_2 \\ (110)_2 \\ \hline (110)_2 \end{array}$$

$$(11)_2 \times (10)_2 = (110)_2 \quad \text{پس}$$

اعشاری نظام میں ہندسوں کی مقامی قیمت 10 کے حساب سے کم یا زیادہ ہوتی ہے۔ ثنائی نظام میں 2 کے حساب سے کم یا زیادہ ہوتی ہے۔

مثال 15: $(11011011)_2 \times (10101)_2$ کو حل کریں۔

حل: $(11011011)_2 \times (10101)_2$

$$\begin{array}{r}
 (11011011)_2 \\
 \times (10101)_2 \\
 \hline
 11011011 \\
 00000000 \\
 1101101100 \\
 0000000000 \\
 110110110000 \\
 \hline
 (1000111110111)_2
 \end{array}$$

(b) اساس 5 کا عددی نظام

جمع: اساس 5 میں جمع کرتے وقت اگر دو یا زیادہ ہندسوں کا مجموعہ 5 یا 5 سے زیادہ آجائے تو مجموعہ کو 5 پر تقسیم کر کے باقی کو لکھ لیا جاتا ہے اور خارج قسمت کو آگے لے جایا جاتا ہے۔

اساس 5 کے نظام میں جمع کا جدول

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

جمع کے عمل کی وضاحت مثالوں کی مدد سے کی جاتی ہے۔

مثال 16: حل کریں۔ $(4)_5 + (3)_5$

حل: $(4)_5 + (3)_5$

$4 + 3 = 7$ اور اساس 5 میں 7 کو $(12)_5$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس لیے $(4)_5 + (3)_5 = (12)_5$

مثال 17: $(12433)_5$ اور $(31243)_5$ کو جمع کیجیے۔

حل: $(12433)_5 + (31243)_5$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \\
 (12433)_5 \\
 + (31243)_5 \\
 \hline
 (44231)_5
 \end{array}$$

تفریق:

مثال 18: حل کریں۔ $(3421)_5 - (2143)_5$ حل: $(3421)_5 - (2143)_5$

⑤

③ ① ⑤

 $(3 \ 4 \ 2 \ 1)_5$ $- (2 \ 1 \ 4 \ 3)_5$ $(1 \ 2 \ 2 \ 3)_5$

پہلے کالم میں 1 میں سے 3 تفریق نہیں ہو سکتا۔ دوسرے کالم کے 2 سے 1 حاصل کرتے ہیں جو دراصل 5 ہے۔ اب $5 + 1 = 6$ میں سے 3 تفریق کر کے 3 حاصل کرتے ہیں۔

دوسرے کالم میں 1 رہ گیا ہے۔ اب تیسرے کالم کے 4 میں سے 1 حاصل کرتے ہیں جو دراصل 5 ہے۔ اب $5 + 1 = 6$ میں سے 4 تفریق کر کے 2 حاصل کرتے ہیں اور اسی طرح عمل جاری رکھتے ہیں۔

ضرب:

اساس 5 کے نظام میں ضرب کا جدول

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

مثال 19: $(23)_5$ کو $(14)_5$ سے ضرب دیں۔حل: $(23)_5 \times (14)_5$

②

 $(2 \ 3)_5$ $\times (1 \ 4)_5$ $2 \ 0 \ 2$ $2 \ 3 \ 0$ $(4 \ 3 \ 2)_5$

$4 \times 3 = 12$ اور اساس 5 میں 12 کو $(22)_5$ لکھتے ہیں۔ اس لیے 2 لکھ لیا جاتا ہے اور حاصل 2 کو اگلے کالم کے اوپر لے جایا جاتا ہے۔ اور $4 \times 2 = 8$ میں 2 حاصل کو جمع کرتے ہیں یوں $8 + 2 = 10$ حاصل ہوا اور 10 کو اساس 5 میں $(20)_5$ لکھتے ہیں۔

مثال 20: حل کریں۔ $(421)_5 \times (234)_5$ حل: $(421)_5 \times (234)_5$

①	②	③	①
↓	↓	↓	①
			$(4 \ 2 \ 1)_5$
			$\times (2 \ 3 \ 4)_5$
			$3 \ 2 \ 3 \ 4$
			$1 \ 3 \ 0$
			$2 \ 0 \ 0$
			$(2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4)_5$

(c) اساس 8 کا عددی نظام (Octal Number System)

جمع: اس عددی نظام میں 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ہندسے استعمال ہوتے ہیں۔ جمع کرتے وقت ہم صفر سے شروع کر کے 7 تک پہنچ جاتے ہیں اور 8 کو $(10)_8$ لکھتے ہیں اور اسے صفر، ایک اساس 8 پڑھتے ہیں۔
مثال 21: درج ذیل اساس 8 میں دیے گئے اعداد کی حاصل جمع معلوم کریں۔

(i) $(6)_8 + (7)_8$ (ii) $(64)_8 + (44)_8$ (iii) $(255636)_8 + (143576)_8$

(i) $(6)_8 + (7)_8$

حل:

$$(6)_8 + (7)_8 = (15)_8$$

انفی شکل میں:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 13 \\ \hline & \underline{15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (6)_8 \\ + (7)_8 \\ \hline (15)_8 \end{array}$$

عمودی شکل میں:

(ii) $(64)_8 + (44)_8$

$$(64)_8 + (44)_8 = (130)_8$$

انفی شکل میں:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 11 \\ \hline & \underline{13} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ (64)_8 \\ + (44)_8 \\ \hline (130)_8 \end{array}$$

عمودی شکل میں:

(iii) $(255636)_8 + (143576)_8$

$$(255636)_8 + (143576)_8 = (421434)_8$$

انفی شکل میں:

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \\ (255636)_8 \\ + (143576)_8 \\ \hline (421434)_8 \end{array}$$

عمودی شکل میں:

تفریق:
مثال 22: حل کریں۔

(i) $(14)_8 - (6)_8$ (ii) $(604)_8 - (247)_8$ (iii) $(455122)_8 - (216634)_8$

حل:

(i) $(14)_8 - (6)_8$

$$\begin{array}{r} (14)_8 \\ - (6)_8 \\ \hline (6)_8 \end{array}$$

$(14)_8 - (6)_8$ کو عمودی شکل میں لکھنے سے:

$(14)_8 - (6)_8 = (6)_8$ پس

(ii) $(604)_8 - (247)_8$

$$\begin{array}{r} (604)_8 \\ - (247)_8 \\ \hline (335)_8 \end{array}$$

$(604)_8 - (247)_8$ کو عمودی شکل میں لکھنے سے:

$(604)_8 - (247)_8 = (335)_8$ پس

(iii) $(455122)_8 - (216634)_8$

$$\begin{array}{r} (455122)_8 \\ - (216634)_8 \\ \hline (236266)_8 \end{array}$$

$(455122)_8 - (216634)_8$ کو عمودی شکل میں لکھنے سے:

$(455122)_8 - (216634)_8 = (236266)_8$ پس

ضرب:

مثال 23: ضرب دیں۔ (i) $(36)_8 \times (43)_8$ (ii) $(446)_8 \times (213)_8$

حل:

(i) $(36)_8 \times (43)_8$

$$\begin{array}{r} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ (36)_8 \\ \times (43)_8 \\ \hline (132)_8 \\ (1700)_8 \\ \hline (2032)_8 \end{array}$$

$(36)_8 \times (43)_8$ کو عمودی شکل میں لکھنے سے:

$(36)_8 \times (43)_8 = (2032)_8$ پس

(ii) $(446)_8 \times (213)_8$

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1} \textcircled{1} \\
 \textcircled{1} \textcircled{2} \\
 (446)_8 \\
 \times (213)_8 \\
 \hline
 (1562)_8 \\
 (4460)_8 \\
 \hline
 (111400)_8 \\
 \hline
 (117642)_8
 \end{array}$$

عمودی شکل میں لکھنے سے:

$$(446)_8 \times (213)_8 = (117642)_8 \quad \text{پس}$$

3.2.3 مختلف اساس میں اعداد کی جمع، تفریق اور ضرب

مختلف اساس میں اعداد پر حسابی عوامل کرنے سے پہلے تمام اعداد کو مترادف اعشاری نظام میں تحويل کر لیا جاتا ہے۔ اگر جواب اساس 2، 5، 8 یا 10 میں درکار ہو تو مطلوبہ اساس کے عددی نظام میں تحويل کر لیا جاتا ہے۔

مثال 24: $(100111)_2 + (4123)_5 + 567$ کو حل کیجیے اور جواب کو اساس 2، 5 اور 10 کے نظام میں تحويل کریں۔

$$\text{حل: } (100111)_2 + (4123)_5 + 567$$

$(100111)_2$ اور $(4123)_5$ کو اعشاری نظام میں تحويل کرتے ہیں۔

$$(100111)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 32 + 0 + 0 + 4 + 2 + 1 = 39$$

$$(4123)_5 = 4 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0$$

$$= 500 + 25 + 10 + 3 = 538$$

$$(10111)_2 + (4123)_5 + 567 = 39 + 538 + 567 = 1144 \quad \text{اب}$$

1144 کو ثنائی نظام میں (اساس 2) اور اساس 5 کے عددی نظام میں تحويل کرتے ہیں۔

2	1144
2	572 - 0
2	286 - 0
2	143 - 0
2	71 - 1
2	35 - 1
2	17 - 1
2	8 - 1
2	4 - 0
2	2 - 0
	1 - 0

5	1144
5	228 - 4
5	45 - 3
5	9 - 0
	1 - 4

$$1144 = (10001111000)_2 \quad \text{یوں}$$

$$1144 = (14034)_5 \quad \text{اور}$$

$$(100111)_2 + (4123)_5 + 567 = (10001111000)_2 \quad \text{اس لیے}$$

$$(100111)_2 + (4123)_5 + 567 = (14034)_5 \quad \text{اور}$$

مثال 25: $(777)_8 - (2343)_5 - (1000111)_2$ کو حل کیجیے اور جواب کو اساس 2 کے نظام میں تھویل کریں۔

حل: $(777)_8 - (2343)_5 - (1000111)_2$

تمام اعداد کو اعشاری نظام میں تھویل کرتے ہیں۔

$$(777)_8 = 7 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$

$$= 7 \times 64 + 56 + 7 \times 1$$

$$= 448 + 56 + 7$$

$$= 511$$

$$(2343)_5 = 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0$$

$$= 250 + 75 + 20 + 3$$

$$= 348$$

$$(1000111)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 64 + 4 + 2 + 1 = 71$$

$$(777)_8 - (2343)_5 - (1000111)_2 = 511 - 348 - 71$$

یوں:

$$= 511 - 419$$

$$= 92$$

92 کو اساس 2 کے عددی نظام میں تھویل کرتے ہیں۔

2	92	
2	46	- 0
2	23	- 0
2	11	- 1
2	5	- 1
2	2	- 1
	1	- 0

$$92 = (1011100)_2$$

پس

مشق 3.2

1- حل کیجیے۔

(i) $(101)_2 + (111)_2$

(ii) $(11001000111)_2 + (1010110111)_2$

(iii) $(11011)_2 - (10000)_2$

(iv) $(111011)_2 - \{(1010)_2 + (1001)_2\}$

(v) $(1111111)_2 \times (11011)_2$

(vi) $(2244)_5 + (4433)_5$

(vii) $(340102)_5 + (230124)_5$

(viii) $(100001)_5 - (33322)_5$

(ix) $(44143)_5 \times (23023)_5$

(x) $(43230)_5 \times (2412)_5$

(xi) $(5631)_8 + (2456)_8$

(xii) $(7541)_8 - (5675)_8$

(xiii) $(4672)_8 \times (507)_8$

(xiv) $(2465)_8 \times (465)_8$

(xv) $635 - \{(2244)_5 - (1243)_5 - (11011)_2\}$

- 2- حل کیجیے اور جواب کو اساس 2، 5 اور 8 کے عددی نظام میں تھویل کریں۔
- (i) $(75)_8 + (1342)_5 + (100111)_2$
- (ii) $248 + (3124)_5 - (110110)_2$
- (iii) $(563)_8 - \{(4433)_5 - (2134)_5 - (111011)_2\}$
- (iv) $(3344)_5 + \{(4101)_5 + (217)_8 + (1010101)_2 - (11011)_2\}$
- (v) $(6767)_8 - \{(101111101)_2 - (4213)_5 + (1423)_5 - (1110111001)_2\}$
- (vi) $(1423)_5 \times (110011)_2 - (243)_5$
- (vii) $(1010111010)_2 \times (40401)_5 + (4301)_5 \times (111001)_2$
- (viii) $\{(3404)_5 + (1100101)_2\} \{(3404)_5 - (1100101)_2\}$
- (ix) $\{(467)_8 + (101110011)_2\} \times \{(467)_8 + (3004)_5\}$
- (x) $\{(31234)_5 + (10110111)_2\} \{2459 - (1342)_5\}$

جائزہ مشق 3

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

- (i) کون سا عددی نظام 0, 1, 2, 3, 4 اعداد پر مشتمل ہوتا ہے؟
- (a) ثنائی نظام (b) آکٹل سسٹم (c) اعشاری نظام (d) اساس 5 کا نظام
- (ii) 10^3 کی قیمت کیا ہے؟
- (a) 30 (b) 100 (c) 300 (d) 1000
- (iii) $(100)_2$ کو اعشاری نظام میں کیسے لکھتے ہیں؟
- (a) 2 (b) 7 (c) 4 (d) 10
- (iv) $(304)_5$ کو اعشاری نظام میں کیسے لکھتے ہیں؟
- (a) 75 (b) 30 (c) 79 (d) 34
- (v) $(11)_2 + (10)_2 = ?$
- (a) $(110)_2$ (b) $(111)_2$ (c) $(101)_2$ (d) $(11)_2$
- (vi) $(3)_5 \times (4)_5 = ?$
- (a) $(22)_5$ (b) $(34)_5$ (c) $(33)_5$ (d) $(12)_5$
- (vii) $(400)_5 - (33)_5 = ?$
- (a) $(312)_5$ (b) $(312)_{10}$ (c) $(367)_5$ (d) $(367)_{10}$

2- نیچے دیے گئے سوالات کے جوابات تحریر کریں۔

- (i) ثنائی عددی نظام کی تعریف کریں۔ (ii) آکٹل عددی نظام میں استعمال ہونے والے ہندسے لکھیں۔
- (iii) اعشاری عددی نظام کی تعریف کریں۔ (iv) اساس 2 کے عددی نظام میں سب سے بڑا کون سا ہندسہ استعمال ہوتا ہے؟

- 3- درج ذیل کو اعشاری عددی نظام میں تھویل کریں۔
- i. $(101)_2$ ii. $(1000)_2$ iii. $(2003)_5$ iv. $(3276)_8$ v. $(1134)_5$
- 4- درج ذیل اعداد کو اساس 5 اور اساس 8 کے عددی نظام میں تھویل کریں۔
- i. 154 ii. 820 iii. 2640 iv. 51605 v. 898
- 5- حل کریں۔
- i. $(11001)_2 + (101)_2$ ii. $(100111)_2 + (10111)_2$ iii. $(10000)_2 - (111)_2$
- 6- حل کریں۔
- i. $(21304)_5 + (2003)_5$ ii. $(4001)_5 - (302)_5$
- iii. $(2442)_5 + (4043)_5$ iv. $(212)_5 \times (34)_5$
- 7- حل کریں۔
- i. $(546)_8 + (327)_8$ ii. $(7000)_8 - (4456)_8$
- iii. $(7643)_8 \times (2346)_8$ iv. $(467)_8 \times (433)_8$
- 8- حل کریں اور جواب کو اعشاری عددی نظام میں لکھیں۔
- i. $(2273)_8 - \{(104)_5 + (42)_5\}$ ii. $\{(80)_{10} + (241)_5\} + \{(34)_5 - (111)_2\}$
- iii. $[278819 - \{60065 - ((202)_5 + (101)_2)\}]$

خلاصہ

- اساس 2 کے عددی نظام کو ثنائی عددی نظام بھی کہتے ہیں۔
- ثنائی عددی نظام میں تمام اعداد کو 0, 1 ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ثنائی عددی نظام میں تمام اعداد کو 2 کی قوت کے عادوں کی صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
- اساس 5 کے عددی نظام میں 0, 1, 2, 3, 4 ہندسوں سے اعداد کو لکھا جاتا ہے۔
- اساس 5 کے عددی نظام میں تمام اعداد کو 5 کی قوت کے عادوں کی صورت میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
- اساس 8 کے عددی نظام کو آکٹل نمبر سسٹم (Octal Number System) بھی کہتے ہیں۔
- اساس 8 کے عددی نظام میں تمام اعداد کو 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ہندسوں سے لکھا جاتا ہے۔
- اساس 8 کے عددی نظام میں تمام اعداد کو 8 کی قوت کے عادوں کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔
- اعشاری عددی نظام میں تمام اعداد کو 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ہندسوں سے لکھا جاتا ہے۔
- اعشاری عددی نظام مقامی عددی قیمت کا نظام ہے جس میں ہر مقام کی قیمت 10 کی قوت سے ظاہر ہوتی ہے۔
- عدد کو ایک عددی نظام سے دوسرے عددی نظام میں بدلنے کے لیے مسلسل تقسیم کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے اور تقسیم متعلقہ اساس سے کی جاتی ہے۔

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مرکب تناسب کی تعریف کر سکیں۔
- مرکب تناسب، شراکت اور وراثت سے متعلقہ روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- کمرشل بینک، ڈیپازٹ، بینک اکاؤنٹس کی اقسام، پی ایل ایس سیونگ اکاؤنٹ، کرنٹ ڈیپازٹ اکاؤنٹس، پی ایل ایس ٹرم ڈیپازٹ اکاؤنٹ اور فارن کرنسی اکاؤنٹ کو سمجھ سکیں۔
- نیوگیٹیو ایبل انسٹرومنٹس جیسا کہ چیک، ڈیمانڈ ڈرافٹ اور بے آر ڈر کو بیان کر سکیں۔
- آن لائن بینکنگ، اے ٹی ایم کے ذریعہ لین دین، ڈیبٹ اور کریڈٹ کارڈز (ویزا اور ماسٹر) کو سمجھ سکیں۔
- پاکستانی کرنسی کو انٹرنیشنل کرنسیوں میں تبدیل کر سکیں۔
- منافع / مارک اپ، اصل زر، منافع / مارک اپ کی شرح معلوم کر سکیں۔
- اوور ڈرافٹ (OD)، گردش سرمایہ (RF)، ڈیمانڈ فنڈس (DF) اور لیونگ کو بیان کر سکیں۔
- بینکنگ اور فنڈس سے متعلقہ روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- فیصد نفع و نقصان معلوم کر سکیں۔
- فیصد چھوٹ یا کٹوتی معلوم کر سکیں۔
- یکے بعد دیگرے لین دین کے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- بیمہ کی تعریف کر سکیں۔
- انکم ٹیکس، قابل ٹیکس آمدنی اور مستثنیٰ آمدنی کو بیان کر سکیں۔
- انفرادی انکم ٹیکس سے متعلقہ روزمرہ زندگی کے مسائل کا حل معلوم کر سکیں۔

4.1 تناسب مرکب (Compound Proportion)

ہم سیکھ چکے ہیں کہ دو نسبتوں کی برابری کو تناسب مرکب کہتے ہیں۔ اگر چار مقداریں a, b, c, d اور d متناسب ہوں تو انہیں $a : b :: c : d$ لکھا جاتا ہے۔ دراصل یہ نسبتوں کے درمیان ایک تعلق ہے۔ تناسب دو قسم کا ہے۔

(i) تناسب راست (Direct proportion)

(ii) تناسب معکوس (Inverse proportion)

(i) تناسب راست (Direct proportion)

دو مقداروں میں سے اگر ایک مقدار بڑھے یا کم ہو تو دوسری مقدار بھی اُسی نسبت سے بڑھتی ہے یا کم ہوتی ہے۔ مقداروں کے درمیان اس قسم کے تناسب کو تناسب راست کہتے ہیں۔

مثال 1: اگر 12 انڈوں کی قیمت 96 روپے ہے تو 80 روپے میں کتنے انڈے خریدے جاسکتے ہیں؟

حل: ہم دیکھ سکتے ہیں کہ جب رقم کم ہوگی تو انڈے بھی کم مقدار میں خریدے جائیں گے۔ اس لیے یہ تناسب راست ہے۔

فرض کریں انڈوں کی تعداد $x =$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{انڈے} & & \text{انڈے} & & \text{رقم (روپوں میں)} & & \text{رقم (روپوں میں)} \\ 12 & : & x & :: & 96 & : & 80 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{96}{80}$$

$$\Rightarrow 96 \times x = 12 \times 80$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \times 80}{96} = 10 \text{ انڈے}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{انڈے} & & \text{رقم (روپوں میں)} \\ 12 \uparrow & : & 96 \uparrow \\ x \uparrow & : & 80 \uparrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{80}{96}$$

$$\Rightarrow x = \frac{80 \times 12}{96} = 10 \text{ انڈے}$$

(ii) تناسب معکوس (Inverse proportion)

دو مقداروں کے درمیان ایسا تعلق کہ جب ایک مقدار جس نسبت سے بڑھے تو دوسری مقدار اُسی نسبت سے کم ہو یا اس کے برعکس ہو تو ایسے تناسب کو تناسب معکوس کہتے ہیں۔

مثال 2: کسی کیمپ میں 10 آدمیوں کے لیے 21 دن کی خوراک موجود ہے۔ اگر 3 آدمی کیمپ سے چلے جائیں تو وہی خوراک باقی آدمیوں کے لیے کتنے دنوں کے لیے کافی ہوگی؟

$$\text{آدمیوں کی تعداد} = 10$$

$$\text{جتنے آدمی چلے جاتے ہیں} = 3$$

$$\text{باقی آدمیوں کی تعداد} = 10 - 3$$

$$= 7$$

حل:

ہم دیکھ سکتے ہیں جب آدمیوں کی تعداد کم ہوگی تو راشن زیادہ دن تک چلے گا۔ یہ تناسب معکوس ہے۔

$$\text{فرض کریں دنوں کی تعداد} = x$$

$$\begin{array}{cccc} \text{آدمی} & & \text{دن} & \\ 10 & : & 21 & :: \\ & & x & \end{array}$$

عمودی شکل میں اس طرح لکھتے ہیں

$$\begin{array}{ccc} \text{آدمی} & & \text{دن} \\ 10 & \downarrow & : & 21 & \uparrow \\ 7 & \downarrow & : & x & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \times 21}{7} = 30 \text{ دن}$$

پس خوراک 30 دن کے لیے کافی ہوگی۔

4.1.1 تناسب مرکب کی تعریف

دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو تناسب مرکب کہتے ہیں۔

4.1.2 روزمرہ زندگی میں مرکب تناسب، شراکت اور وراثت کے مسائل کا حل۔

(a) تناسب مرکب (Compound proportion)

تناسب مرکب کے متعلقہ سوالات کو حل کرنے کے طریقہ کی وضاحت مثالوں کی مدد سے کی جاتی ہے۔

مثال 3: اگر 35 مزدور 5 گھنٹے میں 805 cm^3 مٹی کھودتے ہیں تو 30 مزدور 6 گھنٹے میں کتنی مٹی کھودیں گے؟
 حل: مزدوروں کی تعداد کم ہو رہی ہے اس لیے کم مٹی کھودیں گے۔ یہ تناسب راست ہے۔ وقت زیادہ ہو رہا ہے اس لیے مٹی زیادہ کھودی جائے گی یہ بھی تناسب راست ہے۔
 فرض کریں مٹی کی مقدار $x \text{ cm}^3 =$

مزدوروں کی تعداد	وقت (گھنٹے)	مٹی کی مقدار (cm^3)
35 ↑	5 ↑	805 ↑
30 ↑	6 ↑	x ↑
$\Rightarrow \frac{x}{805} = \frac{6}{5} \times \frac{30}{35}$		
$\Rightarrow x = \frac{6 \times 30 \times 805}{5 \times 35}$		
$x = 6 \times 6 \times 23$		
$x = 828 \text{ cm}^3$		

پس 828 cm^3 مٹی کھودی جائے گی۔

مثال 4: 14 افراد کے لیے 40 دن کے لیے 8,000 روپے کافی ہیں۔ معلوم کیجیے کہ 15 افراد کے لیے 15,000 روپے کتنے دنوں کے لیے کافی ہوں گے؟

حل: رقم بڑھ گئی ہے اس لیے یہ زیادہ دنوں کے لیے کافی ہوگی۔ یہ تناسب راست ہے۔ افراد کی تعداد بڑھ گئی ہے اس لیے دنوں کی تعداد کم ہو جائے گی۔ یہ تناسب معکوس ہے۔
 فرض کیا دنوں کی تعداد $x =$

رقم (روپے)	افراد	دن
8,000 ↑	4 ↓	40 ↑
15,000 ↑	5 ↓	x ↑
$\Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{4}{5} \times \frac{15000}{8000}$		
$x = \frac{4 \times 15000 \times 40}{5 \times 8000}$		
$x = 4 \times 15$		
$x = 60 \text{ دن}$		

یہ رقم 60 دنوں کے لیے کافی ہوگی۔

مثال 5: 4200 آدمیوں کے لیے 12 ہیکٹوگرام فی فرد کے حساب سے 32 دن کے لیے خوراک کافی ہے۔ کتنے آدمی چلے جائیں کہ یہی خوراک 16 ہیکٹوگرام فی فرد کے حساب سے 42 دن کے لیے کافی ہو؟

حل: دنوں کی تعداد زیادہ ہوگئی ہے اس لیے آدمیوں کی تعداد کم ہوگی۔ یہ تناسب معکوس ہے۔ خوراک کی مقدار زیادہ ہوگئی ہے۔ آدمیوں کی تعداد کم ہوگی۔ یہ بھی تناسب معکوس ہے۔

فرض کریں آدمیوں کی تعداد $x =$

آدمی	:	خوراک (ہیکٹوگرام)	:	دن
4200 ↑	:	12 ↓	:	32 ↓
x ↑	:	16 ↓	:	42 ↓

$$\Rightarrow \frac{x}{4200} = \frac{32}{42} \times \frac{12}{16}$$

$$x = \frac{2\cancel{32} \times 12 \times \cancel{4200}^{100}}{1\cancel{42} \times 16_1}$$

$$x = 2 \times 12 \times 100$$

$$x = 2400 \text{ آدمی}$$

خوراک 2400 آدمیوں کے لیے کافی ہوگی۔ اس لیے $4200 - 2400 = 1800$ آدمی چھوڑ جائیں گے۔

مشق 4.1

- 1- 30 آدمی 6 گھنٹے روزانہ کام کر کے 56 دن میں ایک سڑک کی مرمت کرتے ہیں۔ معلوم کیجیے کہ 45 آدمی 7 گھنٹے روزانہ کام کر کے کتنے دنوں میں مرمت کر سکیں گے؟
- 2- 60 عورتیں 8 گھنٹے روزانہ کام کر کے 48 کلوگرام سوت کات لیتی ہیں۔ معلوم کیجیے کہ 30 عورتیں 12 گھنٹے کام کر کے کتنے کلوگرام سوت کات لیں گی؟
- 3- ایک 8 میٹر لمبے اور 3 میٹر چوڑے قالین کی قیمت 6288 روپے ہے۔ بتائیے 12 میٹر لمبے اور 6 میٹر چوڑے قالین کی قیمت کیا ہوگی؟
- 4- 15 مزدور 9 دنوں میں 67,500 روپے کمالیتے ہیں معلوم کیجیے کہ 10 مزدور 12 دنوں میں کتنی رقم کمالیں گے؟
- 5- 70 آدمی 150 میٹر لمبی دیوار کو 12 دنوں میں مکمل کر لیتے ہیں۔ 600 میٹر لمبی دیوار 30 دنوں میں کتنے آدمی مکمل کر لیں گے؟
- 6- اگر 12 کونہٹل وزنی سامان کا کرایہ 18 کلو میٹر فاصلہ کے لیے 12 روپے ہو تو 9 کونہٹل وزنی سامان کا کرایہ 20 کلو میٹر فاصلہ کے لیے کتنا ہوگا؟

- 7- اگر 14 معمار 12 میٹر اونچی دیوار کو 12 دنوں میں مکمل کر لیتے ہیں تو بتائیے 120 میٹر اونچی دیوار 7 دنوں میں کتنے معمار مکمل کر سکیں گے؟
- 8- 15 مشینوں پر 6 دنوں میں 360 سوئیٹر بنے جاسکتے ہیں تو بتائیے اگر 3 مشینیں خراب ہو جائیں تو باقی مشینوں پر 10 دنوں میں کتنے سوئیٹر بنے جاسکیں گے؟

- 9- 1440 آدمیوں کے لیے 32 دن کی خوراک کافی ہے۔ کتنے آدمی چلے جائیں کہ خوراک 40 دن کے لیے کافی ہو جبکہ خوراک $1\frac{1}{2}$ گنا زیادہ کر دی گئی ہو؟ [اشارہ: پہلا عنصر 1 (خوراک) ہے اور دوسرا عنصر (خوراک) $\frac{3}{2}$ ہے]

- 10- 10 آدمی 8 دنوں میں 400 سائیکلیں تیار کر سکتے ہیں بتائیے 5 آدمی 16 دنوں میں کتنی سائیکلیں تیار کریں گے؟

(b) شراکت (Partnership)

- اگر کسی کاروبار میں دو یا دو سے زیادہ افراد شامل ہوں اور وہ نفع و نقصان میں بھی حصہ دار ہوں تو اس قسم کے کاروبار کو شراکت کہتے ہیں۔
- اگر ہر حصہ دار کا سرمایہ برابر ہو یا مختلف ہو لیکن کاروبار میں یکساں مدت تک لگا رہے تو یہ شراکت مفرد (Simple partnership) کہلاتی ہے اور نفع و نقصان سرمایہ کی رقم کی نسبت سے تقسیم کیا جاتا ہے۔
- اگر مختلف حصہ داروں کا سرمایہ برابر ہو یا مختلف ہو لیکن کاروبار میں مختلف مدت کے لیے لگا رہے تو یہ شراکت مرکب (Compound partnership) کہلاتی ہے۔ اس صورت میں نفع و نقصان سرمایہ اور مدت کو سامنے رکھ کر تقسیم کیا جاتا ہے۔
- مثال 6: صعود اور عامر نے بالترتیب 56,000 روپے اور 64,000 روپے سے کاروبار شروع کیا۔ ایک سال میں انہوں نے 22,500 روپے کمائے۔ نفع میں ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

حل یہ شراکت مفرد ہے۔

صعود کا سرمایہ (روپوں میں)	:	عامر کا سرمایہ (روپوں میں)
56,000	:	64,000
یا 56	:	64
یا 7	:	8

$$\text{نسبتی مجموعہ} = 7 + 8 = 15$$

$$\text{نفع کی رقم} = 22,500 \text{ روپے}$$

$$\begin{aligned} \text{صعود کا نفع میں حصہ} &= \frac{7}{15} \times 22,500 \\ &= 7 \times 1500 = 10,500 \text{ روپے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عامر کا نفع میں حصہ} &= \frac{8}{15} \times 22,500 \\ &= 8 \times 1500 = 12,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

مثال 7: طاہر نے ایک کاروبار 15,000 روپے سے شروع کیا۔ 5 ماہ بعد عمر 30,000 روپے سرمایہ لگا کر شامل ہو گیا۔ 9 ماہ بعد عثمان 45,000 روپے سرمایہ لگا کر شامل ہوا۔ ایک سال بعد انہیں 406,000 روپے نفع ہوا۔ ہر ایک کا نفع میں حصہ معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{روپے } 15,000 &= \text{طاہر کا } 12 \text{ ماہ کے لیے سرمایہ} \\ &= 15,000 \times 12 \\ &= \text{روپے } 180,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{روپے } 30,000 &= \text{عمر کا } 7 \text{ ماہ کے لیے سرمایہ} \\ &= 30,000 \times 7 \\ &= \text{روپے } 210,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{روپے } 45,000 &= \text{عثمان کا } 3 \text{ ماہ کے لیے سرمایہ} \\ &= 45,000 \times 3 \\ &= \text{روپے } 135,000 \end{aligned}$$

سرمایوں میں نسبت	عثمان	عمر	طاہر
	135,000	210,000	180,000
	135	210	180
	9	14	12

$$\text{نسبتی مجموعہ} = 12 + 14 + 9 = 35$$

$$\text{کل نفع} = \text{روپے } 406,000$$

$$\text{طاہر کا نفع میں حصہ} = \frac{12}{35} \times \frac{81200}{71} \times 11600 = 12 \times 11600$$

$$= \text{روپے } 139,200$$

$$\text{عمر کا نفع میں حصہ} = \frac{14}{35} \times \frac{81200}{71} \times 11600 = 14 \times 11600$$

$$= \text{روپے } 162,400$$

$$\text{عثمان کا نفع میں حصہ} = \frac{9}{35} \times \frac{81200}{71} \times 11600 = 9 \times 11600$$

$$= \text{روپے } 104,400$$

مثال 8: صعود علی اور سعد نے ایک کاروبار بالترتیب 15,000 روپے، 19,000 روپے اور 12,000 روپے کے سرمایہ سے شروع کیا۔ صعود کاروبار کی دیکھ بھال کرتا تھا اور اس کا معاوضہ 16,000 روپے وصول کرتا تھا۔ 5 ماہ بعد علی نے کاروبار سے 9000 روپے نکال لیے اور کاروبار کو 9 ماہ بعد بند کر دیا گیا۔ اگر نفع کی رقم 58,000 روپے ہو تو ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{صعود کا 9 ماہ کے لیے سرمایہ} &= 15,000 \text{ روپے} \\
 \text{صعود کا 1 ماہ کے لیے مؤثر سرمایہ} &= 15,000 \times 9 = 135,000 \text{ روپے} \\
 \text{علی کا 5 ماہ کے لیے سرمایہ} &= 19,000 \text{ روپے} \\
 \text{علی کا 1 ماہ کے لیے مؤثر سرمایہ} &= 19,000 \times 5 = 95,000 \text{ روپے} \\
 \text{علی کا 4 ماہ کے لیے سرمایہ} &= 10,000 \text{ روپے} \\
 \text{علی کا 1 ماہ کے لیے مؤثر سرمایہ} &= 10,000 \times 4 = 40,000 \text{ روپے} \\
 \text{علی کا 1 ماہ کے لیے کل مؤثر سرمایہ} &= 95,000 + 40,000 = 135,000 \text{ روپے} \\
 \text{سعد کا 9 ماہ کے لیے سرمایہ} &= 12,000 \text{ روپے} \\
 \text{سعد کا 1 ماہ کے لیے مؤثر سرمایہ} &= 12,000 \times 9 = 108,000 \text{ روپے} \\
 \text{نفع کی کل رقم} &= 58,000 \text{ روپے} \\
 \text{صعود کا الاؤنس} &= 16,000 \text{ روپے} \\
 \text{بقایا منافع} &= 58,000 - 16,000 = 42,000 \text{ روپے} \\
 \text{سرمایوں میں نسبت} & \\
 \text{سعد} &: 108,000 \\
 \text{علی} &: 135,000 \\
 \text{صعود} &: 135,000 \\
 \text{یا} &: 108 \\
 \text{یا} &: 135 \\
 \text{یا} &: 12 \\
 \text{یا} &: 15 \\
 \text{یا} &: 4 \\
 \text{نسبتی مجموعہ} &= 5 + 5 + 4 = 14 \\
 \text{صعود کا نفع میں حصہ} &= \frac{5}{14} \times 42,000 \\
 &= 5 \times 3,000 = 15,000 \text{ روپے} \\
 \text{صعود کا الاؤنس} &= 16,000 \text{ روپے} \\
 \text{صعود کی کل رقم} &= \text{الائونس} + \text{منافع کی رقم} \\
 &= 15,000 + 16,000 = 31,000 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{علی کا نفع میں حصہ} &= \frac{5}{14} \times 42,000 \\ &= 5 \times 3,000 = 15,000 \text{ روپے} \\ \text{سعد کا نفع میں حصہ} &= \frac{4}{14} \times 42,000 \\ \text{سعد کا نفع میں حصہ} &= 4 \times 3,000 = 12,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

مشق 4.2

- 1- اسلم اور اکرم نے ایک کاروبار بالترتیب 27,000 روپے اور 30,000 روپے لگا کر شروع کیا۔ ایک سال کے بعد انہیں 66,500 روپے نفع ہوا۔ ہر ایک کا نفع میں حصہ معلوم کریں۔
- 2- آمنہ اور مریم نے ایک کاروبار بالترتیب 30,000 روپے اور 40,000 روپے لگا کر شروع کیا۔ ایک سال کے بعد انہیں 8,400 روپے نفع ہو۔ ہر ایک کا نفع میں حصہ معلوم کریں۔
- 3- دو شراکت داروں نے کاروبار شروع کیا۔ پہلے شراکت دار نے 4,000 روپے 9 ماہ کے لیے اور دوسرے نے 3,000 روپے 7 ماہ کے لیے لگائے۔ ان کے درمیان 11,590 روپے نفع کی رقم تقسیم کریں۔
- 4- سعد، صعود اور سعید نے بالترتیب 12,000 روپے، 18,000 روپے اور 24,000 روپے سے ایک کاروبار شروع کیا۔ ایک سال کے بعد انہیں 13,500 روپے نقصان ہوا۔ ہر ایک کا نقصان میں حصہ معلوم کریں۔
- 5- اکرم اور اصغر نے کاروبار بالترتیب 9,000 روپے اور 11,000 روپے لگا کر شروع کیا۔ اکرم نے 6 ماہ بعد کاروبار سے 1,000 روپے نکال لیے۔ اکرم کے روپے نکالنے کے 2 ماہ بعد اصغر نے 1,000 روپے اور لگا دیے۔ ایک سال بعد 14,000 روپے نفع ہوا۔ ہر ایک کا نفع میں حصہ معلوم کیجیے۔
- 6- A، B اور C تین دوستوں نے بالترتیب مبلغ 20,000 روپے، 16,000 روپے اور 18,000 روپے لگا کر ایک فرم بنائی۔ A نے اپنا سرمایہ 4 ماہ کے لیے، B نے اپنا سرمایہ 6 ماہ کے لیے اور C نے اپنا سرمایہ 8 ماہ کے لیے لگایا۔ نفع کی رقم مبلغ 12,000 روپے ان کے درمیان تقسیم کیجیے۔
- 7- اسلم نے ایک کاروبار مبلغ 35,000 روپے لگا کر شروع کیا۔ 3 ماہ بعد اکرم مبلغ 4,000 روپے لگا کر شامل ہوا اور 6 ماہ بعد اصغر مبلغ 5,000 روپے لگا کر شامل ہو گیا۔ سال کے آخر میں انہیں مبلغ 1,620 روپے نفع ہوا۔ ہر ایک کا نفع میں حصہ معلوم کریں۔

(c) وراثت (Inheritance)

وہ مال و متاع جو کوئی شخص چھوڑ کر مرے اور اُس کی اپنی جائز ملکیت ہو تو کہلاتا ہے۔ اس میں وہ تمام مال و متاع شامل ہوتا ہے جو مرنے والے نے خود حاصل کیا ہو یا اُس کو آباؤ اجداد سے ملے ہوں۔ شریعت اسلام کے مطابق ایک مسلمان کے ترکہ کی تقسیم اس طرح سے ہوتی ہے۔ سب سے اول اخراجات تجہیز و تکفین ادا کیے جاتے ہیں اور مرنے والے کے قرض کی ادائیگی کی جاتی ہے۔ (بیوی کا حق بھی قرض تصور ہوگا)۔ اس کے بعد جو کچھ باقی بچے اس میں سے ایک تہائی تک مرنے والے کی وصیت کے مطابق ادائیگی کی جاتی ہے۔ اس کے بعد جو باقی بچے وہ جائز وارثوں میں احکام شریعت کے مطابق تقسیم کیا جاتا ہے۔

درج ذیل مثالوں کی مدد سے اس کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 9: ایک آدمی کا ترکہ 640,000 روپے ہے۔ اُس کے قرضہ کی رقم مبلغ 40,000 روپے ہے اور تجہیز و تکفین پر 5,000 روپے خرچ ہوئے۔ اُس کی بیوہ، ایک بیٹی اور 2 بیٹوں میں اسلامی قانون کے مطابق بقایا رقم تقسیم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{جائیداد کی کل رقم} &= 640,000 \text{ روپے} \\
 \text{قرضہ کی رقم} &= 40,000 \text{ روپے} \\
 \text{تجہیز و تکفین پر خرچہ} &= 5,000 \text{ روپے} \\
 \text{کل ادائیگی} &= 40,000 + 5,000 = 45,000 \text{ روپے} \\
 \text{بقایا رقم} &= 640,000 - 45,000 = 595,000 \text{ روپے} \\
 \text{بیوہ کا حصہ} &= \frac{1}{8} \times 595,000 = 74,375 \text{ روپے} \\
 \text{بقیہ ترکہ} &= 595,000 - 74,375 = 520,625 \text{ روپے} \\
 \text{بیٹی کا حصہ} & \quad \text{بیٹوں کا حصہ} \\
 2 & : \quad 1 \\
 2 \times 2 = 4 & : \quad 1 \times 1 = 1 \\
 4 & : \quad 1 \\
 \text{نسبتی مجموعہ} &= 4 + 1 = 5 \\
 \text{دو بیٹوں کا حصہ} &= \frac{4}{5} \times 520,625 = 416,500 \text{ روپے} \\
 &= 4 \times 104,125 = 416,500 \text{ روپے} \\
 \text{ہر ایک بیٹے کا حصہ} &= \frac{208,250}{2} = 104,125 \text{ روپے} \\
 \text{بیٹی کا حصہ} &= \frac{1}{5} \times 520,625 = 104,125 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

مثال 10: مسما زینب بی بی کے انتقال پر اُس کی جائیداد کی مالیت 802,500 روپے تھی۔ اس جائیداد کو اُس کے خاوند، والدہ اور دو بیٹیوں کے درمیان تقسیم کریں جبکہ خاوند کو جائیداد کا $\frac{1}{4}$ حصہ اور والدہ کو جائیداد کا $\frac{1}{6}$ حصہ ملنا ہے اور بقیہ رقم دو بیٹیوں میں برابر تقسیم کرنا ہے۔ تجہیز و تکفین پر خرچہ 7,500 روپے ہے۔ جائیداد میں ہر ایک کا حصہ معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{کل ترکہ} &= 802,500 \text{ روپے} \\
 \text{تجہیز و تکفین پر خرچہ} &= 7,500 \text{ روپے} \\
 \text{بقیہ رقم} &= 802,500 - 7,500 = 795,000 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{خاوند کا حصہ} &= \frac{1}{1-4} \times 198,750 = 198,750 \text{ روپے} \\ \text{والدہ کا حصہ} &= \frac{1}{1-6} \times 132,500 = 132,500 \text{ روپے} \\ \text{خاوند اور والدہ کا حصہ} &= 198,750 + 132,500 = 331,250 \text{ روپے} \\ \text{بقیہ ترکہ} &= 795,000 - 331,250 = 463,750 \text{ روپے} \\ \text{دونوں بیٹیوں کا حصہ} &= 463,750 \text{ روپے} \\ \text{ہر ایک بیٹی کا حصہ} &= \frac{463,750}{2} = 231,875 \text{ روپے} \end{aligned}$$

مشق 4.3

- 1- ایک آدمی 240,000 روپے ترکہ چھوڑ کر انتقال کر گیا۔ اس کے ورثا میں 6 بیٹیاں اور 2 بیٹے ہیں۔ ترکہ میں سے ہر ایک کا حصہ معلوم کریں اگر بیٹے کا حصہ بیٹی سے دو گنا ہے۔
- 2- اللہ دتہ 850,000 روپے ترکہ چھوڑ کر انتقال کر گیا۔ یہ رقم اس کی بیوی، دو بیٹیوں اور ایک بیٹی میں تقسیم کریں جبکہ کفن و دفن کا کل خرچہ 50,000 روپے تھا۔
- 3- اکرم کے انتقال کے وقت جائیداد کی مالیت 780,000 روپے تھی۔ اس کے ورثا میں ایک بیوہ، 3 بیٹے اور 4 بیٹیاں ہیں۔ ہر ایک کا حصہ معلوم کریں جبکہ کفن و دفن پر 30,000 روپے خرچ ہوا اور قرض کی رقم 50,000 روپے ہے۔
- 4- ایک آدمی بنک میں 72,000 کی بچت چھوڑ کر انتقال کر گیا ایک بیوہ، ایک بیٹا اور ایک بیٹی کا اس ترکہ میں حصہ معلوم کریں۔
- 5- اسلم 650,000 روپے کی جائیداد چھوڑ کر انتقال کر گیا۔ اس کے ذمہ 50,000 روپے کا قرض تھا۔ بقایا ترکہ کو 2 بیٹیوں اور 2 بیٹیوں میں تقسیم کیجیے۔
- 6- اصغر علی نے 655,275 روپے ترکہ میں چھوڑے۔ تجہیز و تکفین پر 5,275 روپے خرچ ہوئے اور قرضہ کی رقم 50,000 روپے تھی۔ ان کی ادائیگی کے بعد باقی ترکہ میں سے $\frac{1}{8}$ حصہ بیوہ کو ملے گا۔ ایک بیٹی اور ایک بیٹی کا حصہ بھی معلوم کیجیے جبکہ بیٹے کو بیٹی سے دو گنا حصہ ملے گا۔
- 7- ایک آدمی 300,000 روپے ترکہ چھوڑ کر انتقال کر گیا۔ اس کے ذمہ 80,000 روپے قرض تھا۔ باقی ترکہ کو اس کے 4 بیٹیوں اور 3 بیٹیوں میں تقسیم کیجیے جبکہ بیٹے کا حصہ بیٹی کے حصہ سے دو گنا ہے۔
- 8- احمد کی بیوی کا انتقال ہوا تو اس کا ایک بیٹا اور دو بیٹیاں تھیں۔ احمد کو ترکہ کے $\frac{1}{4}$ حصہ کی عوض 180,000 روپے ملے باقی رقم بچوں میں تقسیم کر دی گئی۔ اگر بیٹے کا حصہ بیٹی سے دو گنا ہو تو ہر ایک بچے کو کتنی رقم ملی؟

4.2 بینکنگ (Banking)

بینکنگ ایک ایسا کاروبار ہے جس میں لوگوں سے روپیہ وصول کیا جاتا ہے اور اُس کو حفاظت میں رکھا جاتا ہے اور پھر یہی روپیہ لوگوں کو قرض دیا جاتا ہے اور نفع کمایا جاتا ہے۔

4.2.1 بینک اکاؤنٹس کی اقسام (Types of Bank Accounts)

4.2.1.1 کمرشل بینک ڈپازٹس کی تعریف (Define Commercial Bank Deposits)

بینک کا کام لوگوں کی امانتوں کو اپنی تحویل میں رکھنا ہوتا ہے۔ گاہکوں کو قرض دینا اور دیگر سہولیات فراہم کرنا بھی ہے۔ اس کام کا نام کمرشل بینکنگ ہے۔

بینک میں چار قسم کے اکاؤنٹس ہوتے ہیں:

- نفع و نقصان شراکتی سیونگ اکاؤنٹ (PLS Saving Account)
یہ نفع اور نقصان میں شراکت کی بنیاد پر سیونگ اکاؤنٹ ہوتا ہے۔ بینک کھاتہ داروں کی رقم کسی کاروبار وغیرہ میں لگاتا ہے۔ اور ایک مخصوص وقفہ کے بعد کھاتہ داروں کو نفع دیتا ہے جو ان کے اکاؤنٹس میں جمع ہو جاتا ہے اور نقصان کی صورت میں ان کے اکاؤنٹس سے منہا کر دیا جاتا ہے۔ اس قسم کے اکاؤنٹ کا مقصد لوگوں میں بچت کی حوصلہ افزائی کرنا ہے۔ ان کے اکاؤنٹس سے یکرمضان المبارک کو زکوٰۃ کاٹ لی جاتی ہے۔

- کرنٹ ڈپازٹ اکاؤنٹ (Current Deposit Account)
کرنٹ ڈپازٹ اکاؤنٹ عام طور پر کاروباری لوگ کھولتے ہیں جنہیں رقم باقاعدگی سے کئی دفعہ بینک میں جمع کروانا پڑتی ہے اور نکلوانا پڑتی ہے۔ یہ مسلسل جاری رہنے والا اکاؤنٹ ہوتا ہے اور بینک میں رکھی ہوئی رقم پر کسی قسم کا نفع نہیں دیا جاتا۔ بینک کے مقررہ اوقات میں رقم کسی بھی وقت جمع کروائی جاسکتی ہے اور نکلوائی بھی جاسکتی ہے۔ بینک کو پیشگی نوٹس دینے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس اکاؤنٹ پر زکوٰۃ لاگو نہیں ہوتی۔

- نفع و نقصان شراکتی ٹرم ڈپازٹ اکاؤنٹ (PLS Term Deposit Account)
اس قسم کے اکاؤنٹ پر سود نہیں ہوتا۔ کھاتہ دار کو چھ ماہ کے بعد بینک نفع کی ادائیگی کرتا ہے اور اور نفع کی شرح بھی کچھ زیادہ ہوتی ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ بینک کے پاس رقم زیادہ مدت کے لیے جمع رہتی ہے۔ جبکہ نفع و نقصان شراکتی سیونگ اکاؤنٹ میں ایسا نہیں ہوتا۔

- فارن کرنسی اکاؤنٹ (Foreign Currency Account)
فارن کرنسی اکاؤنٹ وہ اکاؤنٹ ہے جو بینک میں پاکستانی کرنسی کے علاوہ غیر ملکی کرنسی جیسا کہ ڈالر، پاؤنڈ اور یورو وغیرہ میں کھولا جاتا ہے۔ فارن کرنسی اکاؤنٹ میں سے زکوٰۃ نہیں کاٹی جاتی اور کسی قسم کا ٹیکس نہیں لیا جاتا۔ فارن کرنسی اکاؤنٹس پر نفع بہت ہی کم دیا جاتا ہے۔

4.2.1.2 نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس جیسا کہ چیک، ڈیمانڈ ڈرافٹ اور پے آرڈر

(Negotiable Instrument)

نیگوشی ایبل انسٹرومنٹس کا مطلب ایسے کاغذات ہیں جو ایک شخص سے دوسرے شخص کے نام منتقل کیے جاسکتے ہیں۔ اس میں درج رقم کو بینک اصل مالک یا اُس کے نمائندے کو دینے کا پابند ہوتا ہے۔

• چیک (Cheque)

چیک بینک کے نام ایک آرڈر ہوتا ہے کہ مخصوص شخص کو درج شدہ رقم ادا کرے۔ کراس چیک متعلقہ شخص کو اپنے اکاؤنٹ میں ہی جمع کروانا ہوتا ہے۔

• ڈیمانڈ ڈرافٹ (Demand Draft)

رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ جس میں بینک کی ایک برانچ اپنے ہی بینک کی دوسری برانچ سے مخصوص شخص کو ادا کرنے کے لیے کہتی ہے۔ اس کی تیاری کے لیے بینک درج کی گئی رقم پہلے سے وصول کر لیتا ہے۔ ڈیمانڈ ڈرافٹ کی تیاری کے لیے بینک برائے نام فیس لیتا ہے۔

• پے آرڈر (Pay Order)

رقم کی ادائیگی کا یہ بھی ایک ہدایت نامہ ہوتا ہے کہ بینک ایک مخصوص شخص کو درج شدہ رقم ادا کرے۔ پے آرڈر پوری رقم وصول کر کے جاری کیا جاتا ہے۔ یہ ایک بینک جاری کرتا ہے تو دوسرے کسی بھی بینک سے وصول کیا جاسکتا ہے۔ اسے بینکرز چیک یا کیشیر کا چیک بھی کہا جاتا ہے۔

4.2.2 آن لائن بینکنگ (Online Banking)

4.2.2.1 آن لائن بینکنگ کی وضاحت

انٹرنیٹ کے استعمال سے بینک اپنے گاہکوں کو سہولیات مہیا کرتا ہے۔ اس کے ذریعہ کھاتہ دار اپنی رقم کی منتقلی اپنے اکاؤنٹ سے دوسرے کسی اکاؤنٹ میں کروا سکتا ہے یوٹیٹی بل کی ادائیگی کی جاسکتی ہے۔ گاہک آن لائن بینکنگ نظام کے تحت کسی بھی مخصوص بینک میں اپنی رقم کو منتقل کر سکتا ہے۔

• اے ٹی ایم (Auto Teller Machine) کے ذریعہ کاروبار

اے۔ ٹی۔ ایم ایک الیکٹرانک مشین ہے۔ بینک اسے اپنے اکاؤنٹ ہولڈرز کو نقد رقم کی ادائیگی کے لیے نصب کرتا ہے۔ اس کی مدد سے اکاؤنٹ ہولڈرز بینکنگ معلوم کر سکتا ہے۔ اس کی مدد سے رقم نکال سکتا ہے، فنڈز منتقل کر سکتا ہے، اکاؤنٹ کارڈ ریکارڈ معلوم کر سکتا ہے اور ایک اکاؤنٹ سے دوسرے اکاؤنٹ میں رقم منتقل کر سکتا ہے۔

• ڈیبٹ کارڈ (Debit Card)

ڈیبٹ کارڈ، کارڈ ہولڈر کو اپنے اکاؤنٹ تک رسائی ممکن بناتا ہے۔ بینک نے گاہکوں کو یہ سہولت دی ہے کہ وہ اپنے اکاؤنٹس سے رقم نکال سکتے ہیں۔ کارڈ ہولڈر کی خریدی گئی اشیاء کا بل اُس کے اکاؤنٹ میں موجود رقم سے کٹوتی کر کے وصول کر لیا جاتا ہے۔

• کریڈٹ کارڈ (ویزا اور ماسٹر کارڈ) (Credit Card - Visa and Master Card)

یہ پلاسٹک کارڈ ہوتا ہے۔ اس کارڈ کے ذریعے کارڈ ہولڈر خریداری کر سکتا ہے۔ ویزا کارڈ اور ماسٹر کارڈ ساری دنیا میں استعمال ہوتے ہیں۔ ویزا اور ماسٹر کارڈوں کے نام نہیں ہیں بلکہ یہ دو کمپنیوں کے نام ہیں۔ کریڈٹ کارڈ ہولڈر سے سالانہ فیس بھی وصول کی جاتی ہے۔

4.2.3 کرنسیوں کا تبادلہ (Conversion of Currencies)

فارن کرنسی کے تبادلہ سے یہ مراد ہے کہ ایک ملک کی کرنسی کے بدلے میں دوسرے ملک کی کرنسی کتنی حاصل ہوگی۔

4.2.3.1 پاکستانی کرنسی کا بین الاقوامی کرنسیوں میں تبادلہ

کرنسیوں کے تبادلہ کی شرح مستقل نہیں ہوتی بلکہ یہ بدلتی رہتی ہے۔ ہم اس شرح تبادلہ کو استعمال میں لاتے ہوئے پاکستانی کرنسی کو بین الاقوامی کرنسیوں میں تبدیل کرتے ہیں۔ [مثلاً روپے $1 = 99.80$ امریکی ڈالر]

مثال 1: مسٹر صعو پاکستانی 50,000 روپے کو امریکی ڈالروں میں تبدیل کروانا چاہتا ہے۔ بتائیے اس رقم کے تبادلہ میں اُسے کتنے امریکی ڈالر ملیں گے جبکہ روپے $1 = 99.80$ امریکی ڈالر؟

حل:

$$\begin{aligned} \text{روپے } 50,000 &= \text{رقم جسے تبدیل کروانا ہے} \\ \text{روپے } 99.80 &= \text{یو۔ ایس ڈالر کا ریٹ} \\ \text{یو۔ ایس ڈالر } 501 &= \frac{50,000}{99.80} = \text{یو۔ ایس ڈالر کی تعداد} \end{aligned}$$

مثال 2: 75,810 روپوں کو یو۔ کے پاؤنڈ میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 168.50$ یو۔ کے پاؤنڈ

حل:

$$\begin{aligned} \text{روپے } 75,810 &= \text{رقم جسے تبدیل کروانا ہے} \\ \text{یو۔ کے پاؤنڈ } 168.50 &= \text{یو۔ کے پاؤنڈ کا ریٹ} \\ \text{یو۔ کے پاؤنڈ } 449.91 &= \frac{75810}{168.50} = \text{یو۔ کے پاؤنڈ کی تعداد} \end{aligned}$$

درج ذیل جدول مختلف کرنسیوں کی ایک دن کے شرح تبادلہ کو ظاہر کرتا ہے۔

ملک	کرنسی	کرنسی کی علامت	قیمت خرید (پاکستانی روپیہ)	قیمت فروخت (پاکستانی روپیہ)
امریکہ	امریکی ڈالر	\$	99.80	99.05
برطانیہ	یو۔ کے پاؤنڈ	£	168.50	168.75
سعودی عرب	سعودی ریال	SAR	26.85	27.10
بھارت	بھارتی روپیہ	₹	1.60	1.65

مشق 4.4

- 1- 70,000 روپے کو امریکی ڈالر میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 99.80$ امریکی ڈالر۔
- 2- 75,000 روپے کو پاؤنڈ میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 168.50$ یو۔ کے پاؤنڈ۔
- 3- 50,000 روپے کو سعودی ریال میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 26.85$ سعودی ریال۔
- 4- 48,000 روپے کو بھارتی روپیہ میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 1.60$ بھارتی روپیہ۔
- 5- 35,000 روپے کو آسٹریلین ڈالر میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 92.77$ آسٹریلین ڈالر۔

- 6- 80,000 روپے کو چینی یں میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 15.91$ چینی یں۔
 7- 50,000 روپے کو کینیڈین ڈالر میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 92$ کینیڈین ڈالر۔
 8- 70,000 روپے کو ترکی لیرا میں تبدیل کریں جبکہ روپے $1 = 46.50$ ترکی لیرا۔

4.2.4 منافع/مارک اپ

• منافع
 جب ہم بینک میں اپنی رقم جمع کراتے ہیں۔ تو بینک ہماری رقم استعمال کرنے کے عوض اصل رقم کے علاوہ کچھ اضافی رقم بھی دیتا ہے۔ یہ اضافی رقم جو بینک ہمیں ہماری رقم کے استعمال کے عوض دیتا ہے ہمارا منافع کہلاتا ہے۔

• مارک اپ
 جب ہم کوئی کاروبار چلانے لیے بینک سے رقم قرض لیتے ہیں تو بینک اصل رقم کے علاوہ بھی کچھ رقم وصول کرتا ہے۔ اس اضافی رقم کو مارک اپ کہتے ہیں۔

• اصل زر
 وہ رقم جو ہم بینک سے قرض لیتے ہیں یا بینک میں جمع کراتے ہیں اصل زر کہلاتی ہے۔

• منافع/مارک اپ کی شرح
 حاصل کیے گئے فی صد منافع کو شرح منافع کہتے ہیں اور بینک کو دی گئی فی صد رقم کو مارک اپ کی شرح کہتے ہیں۔

• مدت
 کاروبار میں لگائی گئی مخصوص رقم کے دورانیہ کو مدت کہتے ہیں۔

4.2.4.1 منافع/مارک اپ، اصل زر، منافع/مارک اپ شرح اور مدت معلوم کرنا

• منافع/مارک اپ معلوم کرنا
 منافع/مارک اپ معلوم کرنے کے لیے درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{شرح} \times \text{مدت} \times \text{اصل زر} = \text{منافع/مارک اپ}$$
 چند مثالوں کی مدد سے اس کلیہ کے استعمال کی وضاحت کی جاتی ہے۔

مثال 3: یونس نے 65,000 روپے بینک سے 2 سال کے لیے 5% شرح مارک اپ پر قرض لیا۔ مارک اپ کی رقم اور کل زر معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{اصل زر} &= 65,000 \text{ روپے} \\ \text{شرح مارک اپ} &= 5\% \\ \text{مدت} &= 2 \text{ سال} \\ \text{منافع/مارک اپ} &= \text{شرح} \times \text{مدت} \times \text{اصل زر} \\ \text{مارک اپ} &= 65,000 \times \frac{5}{100} \times 2 \\ &= 650 \times 5 \times 2 = 6,500 \text{ روپے} \\ \text{کل زر} &= \text{مارک اپ} + \text{اصل زر} \\ &= 65,000 + 6,500 = 71,500 \text{ روپے} \end{aligned}$$

مثال 4: ایک طالب علم نے بینک سے قرض لے کر کمپیوٹر خریدا۔ اس نے 25,000 روپے 10% شرح سالانہ پر 2 سال کے لیے سود منفرد پر قرض لیا۔ مارک اپ کی رقم اور کل رقم بمعہ مارک اپ معلوم کریں۔

حل:

$$\text{اصل زر} = 25,000 \text{ روپے}$$

$$\text{شرح} = 10\%$$

$$\text{مدت} = 2 \text{ سال}$$

$$\text{مارک اپ} = \text{مدت} \times \text{شرح} \times \text{اصل زر}$$

$$= 250,000 \times \frac{10}{100} \times 2$$

$$\text{مارک اپ} = 250 \times 20 = 5,000 \text{ روپے}$$

$$\text{کل زر} = \text{مارک اپ} + \text{اصل زر}$$

$$= 25,000 + 5,000 = 30,000 \text{ روپے}$$

طالب علم کو 30,000 روپے ادا کرنا ہوں گے۔

• اصل زر معلوم کرنا

ہم پڑھ چکے ہیں کہ: مدت \times شرح \times اصل زر = مارک اپ یا منافع

$$\text{پس} \quad \text{اصل زر} = \frac{\text{مارک اپ}}{\text{مدت} \times \text{شرح}}$$

مثال 5: کتنی رقم قرض لی جائیگی کہ 4% شرح سے 2 سال کا نفع 640 روپے ادا کرنا ہوگا؟

حل:

$$\text{نفع} = 640 \text{ روپے}$$

$$\text{شرح} = 4\%$$

$$\text{مدت} = 2 \text{ سال}$$

$$\text{اصل زر} = \frac{\text{مارک اپ}}{\text{مدت} \times \text{شرح}}$$

$$= \frac{16080}{640 \times 100}$$

$$= \frac{16080}{64000}$$

$$= 8,000 \text{ روپے}$$

یوں 8,000 روپے قرض لیا جائے گا۔

مثال 6: ایک شخص نے کچھ رقم 10% شرح سے 3.5 سال کے لیے قرض لیا اور اُسے 3500 روپے مارک اپ ادا کرنا پڑا۔ معلوم کیجیے کہ اُس نے کتنی رقم قرض لی؟

حل:

$$\begin{aligned} \text{روپے مارک اپ} &= 3,500 \\ \text{شرح} &= 10\% \\ \text{مدت} &= 3.5 \text{ سال} = \frac{7}{2} \\ \text{اصل زر} &= \frac{\text{مارک اپ}}{\text{مدت} \times \text{شرح}} \\ &= \frac{3500 \times 100 \times 2}{10 \times 7} \\ \text{اصل زر} &= 10,000 \text{ روپے} \end{aligned}$$

پس قرض کی رقم 10,000 روپے ہے۔

• شرح نفع / مارک اپ معلوم کرنا

کلیہ: $\text{شرح نفع / مارک اپ} = \frac{\text{نفع / مارک اپ}}{\text{مدت} \times \text{اصل زر}}$

مثال 7: 68,000 روپے کی رقم 3 سال کی مدت میں 86,360 روپے ہو جاتی ہے۔ شرح فیصد مارک اپ معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{کل زر} &= 86,360 \\ \text{اصل زر} &= 68,000 \\ \text{مارک اپ} &= 86,360 - 68,000 \\ &= 18,360 \\ \text{مدت} &= 3 \text{ سال} \\ \text{مارک اپ کی شرح} &= \frac{\text{مارک اپ}}{\text{مدت} \times \text{اصل زر}} \\ &= \frac{18360 \times 100}{68000 \times 3} \\ &= \frac{612}{68} \\ \text{مارک اپ کی شرح} &= 9\% \end{aligned}$$

• لیزنگ (ٹھیکہ) (Leasing)

لیزنگ ایک معاہدہ ہے جس میں اثاثہ کا مالک (Lessor) اثاثہ کرایہ پر لینے والے کو ایک خاص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے بدلے میں اثاثہ کو استعمال کرنے کی اجازت دیتا ہے۔ اثاثہ کی ملکیت ٹھیکہ کے دورانیہ میں اثاثہ کے مالک کے پاس ہی رہتی ہے۔ قسط وار خرید بھی اسی طرح کا پیسہ لگانے کا ایک طریقہ کار ہے۔ جس میں رقم کو ایک مدت کے لیے قسط وار دیا جاتا ہے جبکہ ابتدائی طور پر کچھ رقم ادا کر دی جاتی ہے جسے ڈاؤن پے منٹ (Down payment) کہتے ہیں۔ درج ذیل مثالوں کی مدد سے اس کی وضاحت کر دی گئی ہے۔

4.2.5.2 بینکنگ اور فنانس سے متعلقہ روزمرہ زندگی کے مسائل کا حل

مثال 8: ایک کار کی قیمت 450,000 روپے ہے۔ اس کار کی قیمت کا 15% بطور ڈاؤن پے منٹ ادا کر کے خریداجاسکتا ہے۔ مارک اپ کی شرح $10\frac{1}{2}$ فیصد ہے اور ادائیگی کی مدت 2 سال ہے۔ اقساط کی ادائیگی ہر ماہ ہوگی۔

(i) ماہانہ قسط کی رقم کیا ہوگی؟

(ii) کل ادائیگی معلوم کریں۔

حل:

$$450,000 \text{ کا } 15\% \text{ فیصد} = \text{ڈاؤن پے منٹ}$$

$$= \frac{15}{100} \times 450,000$$

$$= 15 \times 4500$$

$$\text{ڈاؤن پے منٹ (پیشگی ادائیگی)} = 67,500 \text{ روپے}$$

$$\text{بقایا رقم} = 450,000 - 67,500$$

$$= 382,500 \text{ روپے}$$

$$\text{مارک اپ} = \text{مدت} \times \text{شرح} \times \text{اصل زر}$$

$$= 382,500 \times \frac{21}{2} \times \frac{1}{100}$$

$$= 3825 \times 21$$

$$\text{مارک اپ} = 80,325 \text{ روپے}$$

$$24 \text{ اقساط میں جتنی رقم ادا کرنا ہوگی} = \text{بقایا رقم} + \text{مارک اپ}$$

$$= 382,500 + 80,325$$

$$= 462,825 \text{ روپے}$$

$$\text{ماہانہ قسط کی رقم} = \frac{462,825}{24}$$

$$= 19,284.38 \text{ روپے}$$

$$\text{کل ادائیگی} = \text{بقایا رقم بمعہ مارک اپ} + \text{ڈاؤن پے منٹ}$$

$$= 67,500 + 462,825$$

$$= 530,325 \text{ روپے}$$

• مدت معلوم کرنا

$$\text{کلئید: مدت} = \frac{\text{نفع/مارک اپ}}{\text{شرح} \times \text{اصل زر}}$$

مثال 9: ایک شخص نے 65,000 روپے کی رقم 3% شرح سالانہ سے قرض لی۔ جو کچھ مدت میں 68,900 روپے ہو گئی۔ بتائیے اُس نے یہ رقم کتنی مدت کے لیے قرض لی؟

حل:

$$\begin{aligned} \text{کل زر} &= 68,900 \text{ روپے} \\ \text{اصل زر} &= 65,000 \text{ روپے} \\ \text{مارک اپ} &= 68,900 - 65,000 = 3,900 \text{ روپے} \\ \text{شرح} &= 3\% \\ \text{نفع/مارک اپ} &= 3,900 \\ \text{مدت} &= \frac{\text{نفع/مارک اپ}}{\text{شرح} \times \text{اصل زر}} \\ &= \frac{3900}{3\% \times 65000} \\ &= \frac{3900 \times 100}{3 \times 65000} \\ &= \frac{3900 \times 100}{195000} \\ &= 2 \text{ سال} \end{aligned}$$

4.2.5 فنانس کی اقسام (Types of Finance)

4.2.5.1 اوور ڈرافٹ، گردش سرمایہ، ڈیمانڈ فنانس اور لیزنگ

• اوور ڈرافٹ (Over Draft - OD)

یہ ایک ایسی سہولت ہے جو بینک اپنے کھاتہ داروں کو مہیا کرتا ہے کہ وہ کھاتے میں موجود رقم سے زیادہ رقم نکلا سکیں۔ اگر کھاتہ دار کے اکاؤنٹ میں رقم موجود نہیں ہے تو پھر بھی بینک چیک واپس نہیں کرتا اور رقم دے دیتا ہے۔ اس کو اوور ڈرافٹ کا نام دیا گیا ہے۔

• گردش سرمایہ (Running Finance)

گردش سرمایہ بھی اوور ڈرافٹ کی طرح ہے۔ گردش سرمایہ کا مطلب کھاتہ دار کو موقع فراہم کرنا ہے کہ وہ بینک میں موجود سے زیادہ رقم نکلا سکتا ہے۔ یہ ایک قسم کی قرضہ کی سہولت ہے جو ایک حد تک دیا جاتا ہے۔ اور اس میں مارک اپ کی شرح مختلف ہوتی ہے۔ عام طور پر گردش سرمایہ ایک سال تک کی مدت کے لیے دیا جاتا ہے۔

• ڈیمانڈ فنانس (Demand Finance)

بعض صورتوں میں ایک شخص خریداری کرنا چاہتا ہے اور اُس کے لیے رقم ادا کرنا چاہتا ہے۔ اُس صورت میں بینک ڈیمانڈ فنانس کی سہولت مہیا کرتا ہے۔ ڈیمانڈ فنانس قرضہ کی ایک قسم ہے جسے مقروض کسی وقت بھی واپس کر سکتا ہے یا بینک کسی وقت بھی قرضہ کی واپسی کا مطالبہ کر سکتا ہے۔ یہ کم مدت کے لیے اور زیادہ مدت کے لیے بھی ہو سکتا ہے۔

مثال 10: ایک کمپنی ایک گھر 6 سال کے لیے لیز پر لیتی ہے۔ معاہدہ کے مطابق کمپنی 1,000,000 روپے بطور ڈاؤن پے منٹ ادا کرتی ہے اور ماہانہ کرایہ 20,000 روپے ادا کرے گی۔ 3 سال بعد کمپنی کرایہ میں 3% اضافہ کر دے گی۔ کل رقم معلوم کریں جو مالک 6 سال میں حاصل کر چکا ہوگا۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{روپے } 1,000,000 &= \text{ڈاؤن پے منٹ} \\
 \text{روپے } 20,000 &= \text{ماہانہ کرایہ} \\
 3 \times 12 \times 20,000 &= \text{3 سال کا کرایہ} \\
 &= 720,000 \text{ روپے} \\
 20,000 \times \frac{103}{100} &= \text{تین سال بعد ماہوار کرایہ} \\
 &= 20,600 \text{ روپے} \\
 3 \times 12 \times 20,600 &= \text{اگلے 3 سال کا کل کرایہ} \\
 &= 741,600 \text{ روپے} \\
 1,000,000 + 720,000 + 741,600 &= \text{کل رقم جو مالک 6 سال بعد وصول کر چکا ہوگا} \\
 &= 2,461,000 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

مشق 4.5

- 1- 40,000 روپے پر 4 سال میں 3% سالانہ شرح سے منافع معلوم کریں۔
- 2- صعود نے بینک سے 25,000 روپے 3 سال کے لیے 6% سالانہ شرح مارک اپ پر لیے۔ بینک کی مارک اپ کی رقم معلوم کریں۔
- 3- ریاض نے ایک کاروبار میں رقم لگائی۔ اُس نے 3 سال میں 10% سالانہ شرح سے 4,200 روپے نفع حاصل کیا۔ کاروبار میں لگائی گئی رقم معلوم کریں۔
- 4- اجمل نے کچھ سرمایہ کاروبار میں لگایا۔ اُس نے 3 سال میں 12% سالانہ شرح سے 27,000 روپے نفع حاصل کیا۔ کاروبار میں لگائی گئی رقم معلوم کریں۔
- 5- 6,800 روپے کی رقم 11 سال میں 9,044 روپے ہو جاتی ہے۔ شرح فیصد سالانہ معلوم کریں۔
- 6- 5,800 روپے کی رقم 3 سال میں 7,105 روپے ہو جاتی ہے۔ شرح فیصد سالانہ معلوم کریں۔
- 7- 15,500 روپے کی رقم کتنی مدت کے لیے لگائی جائے کہ 6% سالانہ شرح سے نفع 2,790 روپے ہو۔
- 8- 25,000 روپے کی رقم بینک میں کتنی مدت کے لیے رکھی جائے کہ 10% سالانہ شرح منافع سے 31,000 روپے ہو جائے۔
- 9- سعید نے 12,000 روپے کی رقم بینک میں رکھی منافع کی شرح $8\frac{1}{2}\%$ سالانہ ہے۔ سعید 2 سال 6 ماہ بعد کتنی رقم وصول کرے گا؟
- 10- ارشد ایک ایئر کنڈیشنر 45,000 میں خریدتا ہے لیزنگ کے لیے اُسے 10% ڈاؤن پے منٹ کرنا ہوگی اور بقایا رقم کے لیے مارک اپ شرح 2 سال کے لیے 15% سالانہ ہے ادائیگی ماہانہ اقساط میں ہوگی۔ (i) ماہانہ قسط معلوم کریں۔ (ii) کل ادائیگی کتنی ہوگی؟

11- ایک بینک 5 سال کے لیے زمین کا ٹکڑا لیز پر لیتا ہے۔ معاہدہ کے مطابق بینک 1,200,000 روپے ڈاؤن پے منٹ ادا کرتا ہے۔ بینک 18,000 روپے ماہوار کرایہ ادا کرے گا۔ 3 سال بعد بینک 3% کے حساب سے کرایہ بڑھا دیتا ہے۔ بتائیے مالک 5 سال میں کتنی رقم وصول کر چکا ہوگا؟

4.3 فی صد (Percentage)

فی صد کا مطلب ہے ہر ایک سو پر یعنی فی سینکڑہ۔ فی صد کی جگہ علامت (%) بھی استعمال ہوتی ہے۔

4.3.1 نفع و نقصان (Profit and Loss)

اگر قیمتِ فروخت، قیمتِ خرید سے زیادہ ہو تو نفع ہوتا ہے۔

$$\text{قیمتِ خرید} - \text{قیمتِ فروخت} = \text{نفع}$$

اگر قیمتِ خرید، قیمتِ فروخت سے زیادہ ہو تو نقصان ہوتا ہے۔

$$\text{قیمتِ فروخت} - \text{قیمتِ خرید} = \text{نقصان}$$

4.3.1.1 نفع و نقصان فی صد معلوم کرنا

نفع و نقصان فی صد قیمتِ خرید پر شمار کیا جاتا ہے۔ نفع و نقصان فی صد معلوم کرنے کے لیے درج ذیل کلیات استعمال کیے جاتے ہیں۔

$$\text{نفع فی صد} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمتِ خرید}} \times 100$$

$$\text{نقصان فی صد} = \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمتِ خرید}} \times 100$$

مثال 1: صعود نے ایک موٹر سائیکل 50,000 روپے میں خریدی اور 56,000 روپے میں فروخت کر دی۔ صعود کا نفع فی صد معلوم کریں۔

حل:

$$\text{قیمتِ خرید} = 50,000 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمتِ فروخت} = 56,000 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع} = \text{قیمتِ فروخت} - \text{قیمتِ خرید}$$

$$= 56,000 - 50,000$$

$$\text{نفع} = 6,000 \text{ روپے}$$

$$\text{نفع فی صد} = \frac{\text{نفع}}{\text{قیمتِ خرید}} \times 100$$

$$= \frac{6,000}{50,000} \times 100$$

$$= 12\%$$

مثال 2: حمید نے زمین کا ایک ٹکڑا 300,000 روپے میں خرید کر 240,000 روپے میں فروخت کر دیا۔ اُس کا فیصد نفع/نقصان معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}
 \text{حل:} \\
 \text{قیمت خرید} &= 300,000 \text{ روپے} \\
 \text{قیمت فروخت} &= 240,000 \text{ روپے} \\
 \text{نقصان} &= \text{قیمت خرید} - \text{قیمت فروخت} \\
 &= 300,000 - 240,000 \\
 &= 60,000 \text{ روپے} \\
 \text{نقصان فیصد} &= \frac{\text{نقصان}}{\text{قیمت خرید}} \times 100 \\
 &= \frac{60,000}{300,000} \times 100 \\
 &= 20\%
 \end{aligned}$$

4.3.2 چھوٹ (Discount)

کسی شے کی اصل قیمت، بازاری قیمت یا اُس پر لکھی گئی قیمت میں جتنی کمی کی جاتی ہے، چھوٹ (Discount) کہلاتی ہے۔ اس کی (Discount) کے بعد شے کی جو قیمت باقی رہ جاتی ہے اُسے قیمت فروخت کہتے ہیں۔ لہذا چھوٹ وہ رقم ہوتی ہے جسے آپ شے خریدتے وقت بچا لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \text{قیمت فروخت} - \text{شے پر لکھی گئی قیمت} &= \text{چھوٹ} \\
 \text{عام طور پر چھوٹ کو شے پر لکھی گئی قیمت کی فیصد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔}
 \end{aligned}$$

4.3.2.1 فیصد چھوٹ معلوم کرنا

مندرجہ ذیل مثالیں فیصد چھوٹ معلوم کرنے کی وضاحت کرتی ہیں۔

مثال 3: علی نے کچھ اشیا 2,500 روپے میں خریدیں۔ اُسے خریداری پر 15% چھوٹ ملی۔ اُن اشیا کی قیمت فروخت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}
 \text{حل:} \\
 \text{شے پر لکھی گئی قیمت (اصل قیمت/بازاری قیمت)} &= 2,500 \text{ روپے} \\
 \text{چھوٹ} &= 15\% \\
 \text{شے پر چھوٹ} &= \frac{2,500 \times 15}{100} \\
 &= 375 \text{ روپے} \\
 \text{قیمت فروخت} &= 2,500 - 375 \\
 &= 2,125 \text{ روپے}
 \end{aligned}$$

مثال 4: ایک چیز کی بازار میں قیمت 1,700 روپے ہے۔ اُسے 1,360 روپے میں فروخت کیا جا رہا ہے۔ چھوٹ فی صد معلوم کریں۔

حل:

$$\text{مارکیٹ میں قیمت} = 1,700 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت فروخت} = 1,360 \text{ روپے}$$

$$\text{چھوٹ} = 1700 - 1360$$

$$= 340 \text{ روپے}$$

$$\text{چھوٹ فیصد} = \frac{\text{چھوٹ}}{\text{مارکیٹ میں قیمت}} \times 100$$

$$= \frac{340}{1700} \times 100$$

$$= 20\%$$

4.3.2.2 کے بعد دیگرے خرید و فروخت کے مسائل کا حل

مثال 5: ایک چیز کی قیمت خرید 6,000 روپے ہے۔ دکاندار اس کی قیمت 15% بڑھا کر لکھ دیتا ہے۔ اس کی قیمت فروخت

4,600 روپے ہے۔ معلوم کیجیے کہ گاہک کو کتنے فیصد چھوٹ دی گئی؟

حل:

$$\text{قیمت خرید} = 6,000 \text{ روپے}$$

$$\text{فیصد اضافہ} = 15\%$$

$$\text{قیمت خرید پر کل اضافہ} = \frac{6000 \times 15}{100}$$

$$= 900 \text{ روپے}$$

$$\text{لکھی ہوئی قیمت} = 6,000 + 900 = 6,900 \text{ روپے}$$

$$\text{قیمت فروخت} = 4,600 \text{ روپے}$$

$$\text{چھوٹ} = \text{مارکیٹ میں قیمت} - \text{قیمت فروخت}$$

$$= 6,900 - 4,600$$

$$= 2,300 \text{ روپے}$$

$$\text{فیصد چھوٹ} = \frac{\text{چھوٹ}}{\text{لکھی ہوئی قیمت}} \times 100$$

$$= \frac{2300}{6900} \times 100$$

$$= \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$$

مثال 6: ایک تھوک فروش نے ایک چیز 10% نفع پر پرچون فروش کو فروخت کی۔ پرچون فروش نے وہی چیز 15% نفع پر 1,897.50 روپے میں فروخت کی۔ تھوک فروش کی قیمت خرید معلوم کیجیے۔

$$\begin{aligned} \text{حل:} \quad & \text{روپے } \frac{3795}{2} = 1897.50 = \text{پرچون فروش کی قیمت فروخت} \\ & \text{نفع} = 15\% \\ & \text{پرچون فروش کی قیمت خرید} = ? \\ & \text{فرض کیا پرچون فروش کی قیمت خرید} = 100 \text{ روپے} \\ & \text{نفع} = 15\% \\ & \text{پرچون فروش کی قیمت فروخت} = 100 + 15 = 115 \text{ روپے} \\ & \text{اگر قیمت فروخت 115 روپے ہو تو قیمت خرید} = 100 \\ & \text{اگر قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو قیمت خرید} = \frac{100}{115} \\ & \text{اگر قیمت فروخت } \frac{3,795}{2} \text{ روپے ہو تو قیمت خرید} = \frac{50}{115} \times \frac{3,795}{2} \\ & = 50 \times 33 = 1,650 \text{ روپے} \\ & \text{تھوک فروش کی قیمت فروخت} = \text{پرچون فروش کی قیمت خرید} \\ & = 1,650 \text{ روپے} \\ & \text{فرض کیا تھوک فروش کی قیمت خرید} = 100 \text{ روپے} \\ & \text{نفع} = 10\% \\ & \text{تھوک فروش کی قیمت فروخت} = 100 + 10 = 110 \text{ روپے} \\ & \text{اگر تھوک فروش کی قیمت فروخت 110 روپے ہو تو قیمت خرید} = 100 \\ & \text{اگر تھوک فروش کی قیمت فروخت 1 روپیہ ہو تو قیمت خرید} = \frac{100}{110} \\ & \text{اگر تھوک فروش کی قیمت فروخت } 1,650 \text{ روپے ہو تو قیمت خرید} = \frac{100}{110} \times 1,650 \\ & = 100 \times 15 = 1,500 \text{ روپے یوں} \end{aligned}$$

مشق 4.6

- 1- حنیف نے ایک کار 550,000 روپے میں خریدی اور کچھ وقت کے بعد 605,000 روپے میں فروخت کر دی۔ حنیف کا نفع فیصد معلوم کریں۔
- 2- ایک چیز کی بازار میں قیمت 3,000 روپے ہے۔ اس چیز پر چھوٹ 20% ہے۔ اس کی قیمت فروخت معلوم کیجیے۔
- 3- ایک صنعت کار کی ایک چیز پر لاگت 2,500 روپے ہے اور وہ اُسے 20% نفع پر فروخت کرتا ہے۔ خریدار اُسے 30% نفع پر فروخت کرتا ہے۔ چیز گاہک کو کتنے میں فروخت ہوئی؟
- 4- ایک سٹور پر ہر ایک چیز کی قیمت میں 12% کمی کر دی گئی۔ نقد ادائیگی کرنے والے گاہک کو 10% مزید چھوٹ دی گئی۔ جس چیز کی ابتدائی قیمت 2,000 روپے درج تھی۔ نقد ادائیگی کرنے والے گاہک کو کتنے میں فروخت کر دی گئی؟
- 5- طاہر نے اپنے بچوں کے لیے دو کھلونے خریدے۔ اُس نے سپائڈر مین اور باربی ڈول بالترتیب 3,000 روپے اور 5,000 روپے میں خریدے۔ کھلونوں کی قیمت پر 20% چھوٹ دی گئی۔ چھوٹ کی رقم اور قیمت فروخت معلوم کریں۔
- 6- طفیل نے ایک سٹور پر کچھ اشیا کی خریداری کی۔ کھانے کی اشیا پر 15% اور دوسری اشیا پر 20% خصوصی چھوٹ دی گئی۔ اُس نے کھانے کی اشیا 1,250 روپے اور دوسری اشیا 750 روپے کی خریدیں۔ ہر ایک پر چھوٹ اور قیمت فروخت علیحدہ علیحدہ معلوم کریں۔
- 7- ایک تھوک فروش اپنی اشیا پر قیمت خرید کو 15% بڑھا کر درج کرتا ہے۔ پرچون فروش اپنی قیمت خرید پر 25% بڑھا دیتا ہے۔ پرچون فروش ایک چیز کو کس قیمت پر فروخت کرے گا جبکہ تھوک فروش کی قیمت خرید 400 روپے ہے؟

4.4 بیمہ (Insurance)

4.4.1 بیمہ کی تعریف

معاملات زندگی میں خطرات سے بچنے کے لیے بیمہ ایک اہم ذریعہ ہے۔ بیمہ دو پارٹیوں کے درمیان ایک معاہدہ ہوتا ہے جسے بیمہ پالیسی کہتے ہیں۔ جس میں ایک شخص بیمہ کمپنی کو ماہانہ، سہ ماہی یا سالانہ کچھ رقم ادا کرتا ہے۔ تاکہ اُسے زندگی کے خطرات، چوری اور نقصانات وغیرہ کی صورت میں کمپنی تحفظ مہیا کرے۔ جس شخص کو بیمہ پالیسی جاری کی جاتی ہے وہ بیمہ دار (Insured) کہلاتا ہے۔ جو کمپنی بیمہ پالیسی جاری کرتی ہے اُسے بیمہ کمپنی (Insurer) کہتے ہیں اور جو رقم باقاعدگی کے ساتھ بیمہ کمپنی کو ادا کی جاتی ہے پر بیمہ (Premium) کہلاتی ہے۔

بیمہ کی کئی اقسام ہیں جس میں صحت، زندگی، جائیداد وغیرہ شامل ہیں۔ اس کلاس میں ہم صرف دو اقسام کے بارے میں پڑھیں گے۔

(i) لائف انشورنس (ii) گاڑی کی انشورنس

4.4.2 لائف انشورنس اور گاڑی کی انشورنس سے متعلقہ روزمرہ زندگی کے مسائل کا حل

(i) لائف انشورنس (Life insurance)

زندگی کا بیمہ ایک معاہدہ ہے جو بیمہ دار اور بیمہ کمپنی کے درمیان ایک مقررہ مدت کے لیے ہوتا ہے۔ بیمہ کمپنی پابند ہوتی ہے کہ بیمہ دار کو اصل رقم اور منافع مقررہ مدت کے بعد ادا کرے۔ بیمہ دار کی موت کی صورت میں بیمہ کمپنی یہ رقم اُس کے مقرر کردہ افراد کو ادا کرے گی۔

مثال 1: صعود نے ایک بیمہ پالیسی 500,000 روپے کی خریدی۔ پالیسی کی کل مالیت کا 4.5% سالانہ پریمیوم ہے۔ پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہے۔ پالیسی کا سالانہ پریمیوم معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{پالیسی کی مالیت} &= 500,000 \text{ روپے} \\ 0.25\% \text{ شرح سے پالیسی کی فیس} &= \frac{25}{100} \times 500,000 \times \frac{1}{100} \\ &= 1,250 \text{ روپے} \\ \text{پہلا پریمیوم بشرح 4.5\%} &= \frac{45}{100} \times \frac{1}{100} \times 500,000 \\ &= 22,500 \text{ روپے} \\ \text{سالانہ پریمیوم} &= \text{پہلا پریمیوم} + \text{پالیسی فیس} \\ &= 22,500 + 1,250 \\ &= 23,750 \text{ روپے} \end{aligned}$$

مثال 2: ایک شخص نے ایک بیمہ پالیسی 300,000 روپے کی خریدی۔ 4.5% شرح سے سالانہ پریمیوم ہے جبکہ پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہے۔ سالانہ پریمیوم اور سہ ماہی پریمیوم 27% سالانہ پریمیوم کے حساب سے معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{پالیسی کی مالیت} &= 300,000 \text{ روپے} \\ 0.25\% \text{ شرح سے پالیسی فیس} &= \frac{25}{100} \times \frac{1}{100} \times 300,000 \\ &= 750 \text{ روپے} \\ 4.5\% \text{ شرح سے پہلا پریمیوم} &= \frac{45}{100} \times \frac{1}{100} \times 300,000 \\ &= 13,500 \text{ روپے} \\ \text{سالانہ پریمیوم} &= \text{پہلا پریمیوم} + \text{پالیسی فیس} \\ &= 13,500 + 750 \end{aligned}$$

$$\text{سالانہ پریمیم} = 14,250 \text{ روپے}$$

$$\text{سہ ماہی پریمیم} = 14,250 \times \frac{27}{100}$$

$$= 3,847.50 \text{ روپے}$$

(ii) گاڑی کی انشورنس (Vehicle Insurance)

گاڑی کی انشورنس گاڑی کے چوری ہونے، حادثات کا شکار ہونے کے خطرہ کے پیش نظر انشورنس پالیسیاں خریدی جاتی ہیں۔ پالیسی کی مالیت کا انحصار گاڑی کی قیمت پر ہوتا ہے۔

مثال 3: اسلم نے اپنی موٹر سائیکل کی ایک سال کے لیے بیمہ پالیسی خریدی۔ موٹر سائیکل کی قیمت 50,000 روپے ہے اور انشورنس کی شرح 4.5% ہے۔ پریمیم کی رقم معلوم کیجیے۔

$$\text{حل:} \quad \text{موٹر سائیکل کی قیمت} = 50,000 \text{ (روپے)}$$

$$\text{انشورنس کی شرح} = 4.5\%$$

$$\text{پریمیم کی رقم} = \frac{4.5}{100} \times 50000$$

$$= \frac{45}{10} \times \frac{1}{100} \times 50000$$

$$\text{پریمیم کی رقم} = 2,250 \text{ روپے}$$

مثال 4: خالد نے اپنی کار کے لیے انشورنس پالیسی خریدی۔ کار کی قیمت 750,000 روپے ہے۔ 2 سال کے لیے سالانہ پریمیم کی شرح 3% ہے اور قیمت میں کمی 10% سالانہ ہے۔ معلوم کیجیے کہ اُس نے پریمیم کی کل کتنی رقم ادا کی؟

$$\text{حل:} \quad \text{کار کی قیمت} = 750,000 \text{ روپے}$$

$$\text{سالانہ پریمیم کی شرح} = 3\%$$

$$\text{قیمت میں کمی کی شرح} = 10\%$$

$$\text{مدت} = 2 \text{ سال}$$

$$\text{پہلا پریمیم} = 750,000 \text{ کا } 3\% \text{ فیصد}$$

$$= \frac{3}{100} \times 750,000$$

$$= 22,500 \text{ روپے}$$

$$\text{ایک سال بعد کار کی قیمت میں کمی} = 750,000 \text{ کا } 10\%$$

$$\begin{aligned}
\text{ایک سال بعد کار کی قیمت میں کمی} &= \frac{10}{100} \times 750000 \\
&= 75,000 \text{ روپے} \\
\text{ایک سال بعد کار کی قیمت} &= 750,000 - 75,000 = 675,000 \\
\text{دوسرا پریمیوم} &= 3\% \text{ کا } 675,000 \\
&= \frac{3}{100} \times 675,000 \\
&= 20,250 \text{ روپے} \\
\text{دو سال بعد کار کی قیمت میں کمی} &= \frac{10}{100} \times 675,000 \\
&= 67,500 \text{ روپے} \\
\text{دو سال بعد کار کی قیمت} &= 675,000 - 67,500 = 607,500 \\
\text{پریمیوم کی کل رقم} &= 22,500 + 20,250 = 42,750 \text{ روپے}
\end{aligned}$$

مشق 4.7

- 1- عثمان نے ایک کار 1,250,000 روپے میں خریدی اور 4.5% شرح سے ایک سال کی انشورنس کروائی۔ سالانہ پریمیوم معلوم کریں۔
- 2- حمید نے 200,000 روپے کی بیمہ پالیسی خریدی۔ سالانہ پریمیوم کی شرح 5.2% ہے۔ اُس کا پہلا پریمیوم معلوم کریں جبکہ پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہے۔
- 3- زاہد نے ایک لائف انشورنس پالیسی 500,000 روپے میں خریدی۔ سالانہ پریمیوم کی شرح 5.2% ہے اور پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہے۔ ششماہی پریمیوم بحساب 52% سالانہ پریمیوم معلوم کریں۔
- 4- اسامہ نے اپنی زندگی کا بیمہ 700,000 روپے میں کروایا۔ سالانہ پریمیوم پالیسی کا 4.5% کے حساب سے معلوم کریں جبکہ پالیسی فیس کی شرح 0.25% ہے۔ ماہانہ پریمیوم بشرح 9% سالانہ پریمیوم معلوم کریں۔
- 5- صعود نے ایک کار 700,000 روپے میں خریدی اور اس کی انشورنس 4.2% شرح سالانہ سے کروائی۔ پالیسی 3 سال کے لیے تھی۔ معلوم کیجیے کہ وہ سال میں کل کتنا پریمیوم ادا کرے گا جبکہ قیمت میں کمی 12% کے حساب سے ہے۔
- 6- ایک آدمی کے پاس ایک کار ہے جس کی قیمت 1,400,000 روپے ہے۔ اُس نے سالانہ بنیاد پر اس کا بیمہ 2 سال کے لیے کروایا۔ شرح بیمہ 4.5% تھی اور سالانہ قیمت میں کمی 10% تھی۔ اُس نے پریمیوم سالانہ ادا کرنا ہے۔ اُس کا 2 سال کا کل پریمیوم معلوم کریں۔
- 7- فہیم نے اپنی کار کی انشورنس 3 سال کے لیے 3% شرح سے کروائی۔ کار کی قیمت 850,000 ہے۔ کار کی قیمت میں کمی کی شرح 10% ہے۔ بتائیے سال میں کل کتنا پریمیوم ادا کیا گیا؟

4.5 انکم ٹیکس (Income Tax)

4.5.1 انکم ٹیکس، مستثنیٰ آمدنی اور قابل ٹیکس آمدنی

• انکم ٹیکس (Income Tax)

انکم ٹیکس اُس شخص سے وصول کیا جاتا ہے جس کی آمدنی ایک خاص حد سے بڑھ جاتی ہے اور اس حد کا تعین حکومت کرتی ہے۔ انکم ٹیکس کے قوانین حکومت گا ہے بگا ہے تبدیل کرتی رہتی ہے۔

• مستثنیٰ آمدنی یا چھوٹ کی رقم (Exempt Income)

ایسی آمدنی جس پر ٹیکس وصول نہیں کیا جاتا مستثنیٰ آمدنی کہلاتی ہے۔

• قابل ٹیکس آمدنی (Taxable Income)

کل آمدنی میں سے مستثنیٰ آمدنی نکال دی جائے تو باقی آمدنی کو قابل ٹیکس آمدنی کہتے ہیں۔

$$\text{مستثنیٰ آمدنی} - \text{کل آمدنی} = \text{قابل ٹیکس آمدنی}$$

قابل ٹیکس آمدنی کا چارٹ

نمبر شمار	سالانہ آمدنی	ٹیکس کی شرح
1	0 روپیہ تا 400,000 روپے	0%
2	400,001 روپے تا 750,000 روپے	400,000 روپے سے اوپر 5%
3	750,001 روپے تا 1,400,000 روپے	17,500 روپے کے ساتھ 750,000 روپے سے زائد پر 10%
4	1,400,001 روپے تا 1,500,000 روپے	82,500 روپے کے ساتھ 1,400,000 روپے سے زائد پر 12.5%
5	1,500,001 روپے تا 1,800,000 روپے	95,000 روپے کے ساتھ 1,500,000 روپے سے زائد پر 15%
6	1,800,001 روپے تا 2,500,000 روپے	140,000 روپے کے ساتھ 1,800,000 روپے سے زائد پر 17.5%
7	2,500,001 روپے تا 3,000,000 روپے	262,500 روپے کے ساتھ 2,500,000 روپے سے زائد پر 20%
8	3,000,001 روپے تا 3,500,000 روپے	362,500 روپے کے ساتھ 3,000,000 روپے سے زائد پر 22.5%
9	3,500,001 روپے تا 4,000,000 روپے	475,000 روپے کے ساتھ 3,500,000 روپے سے زائد پر 25%
10	4,000,001 روپے تا 7,000,000 روپے	600,000 روپے کے ساتھ 4,000,000 روپے سے زائد پر 27.5%
11	7,000,001 روپے اور اُس سے اوپر	1,425,000 روپے کے ساتھ 7,000,000 روپے سے زائد پر 30%

4.5.2 انفرادی ٹیکس دہندگان سے متعلقہ روزمرہ زندگی کے مسائل کا حل

اس کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1: ایک شخص کی سالانہ آمدنی 578,000 روپے ہے۔ 5% شرح سے انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔

حل: روپے 578,000 = کل سالانہ آمدنی

دی گئی آمدنی پر ٹیکس کی شرح قابل ٹیکس آمدنی کے چارٹ کے سیریل نمبر 2 کے مطابق ہوگی۔

یعنی 400,000 روپے سے زائد پر 5%

قابل ٹیکس آمدنی = 578,000 - 400,000

= روپے 178,000

شرح ٹیکس = 5%

5% کے حساب سے انکم ٹیکس = $\frac{5}{100} \times 178,000$

= روپے 8,900

مثال 2: ایک شخص کی سالانہ آمدنی 1,885,000 روپے ہے۔ اُس نے 47,125 روپے زکوٰۃ ادا کی۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔

حل: روپے 1,885,000 = کل سالانہ آمدنی

روپے 47,125 = زکوٰۃ کی رقم

قابل ٹیکس آمدنی = 1,885,000 - 47,125

= روپے 1,837,875

دی گئی آمدنی پر ٹیکس کی شرح قابل ٹیکس آمدنی کے چارٹ کے سیریل نمبر 6 کے مطابق ہوگی۔

یعنی 140,000 روپے کے ساتھ 1,800,000 روپے سے زائد پر 17.5%

1,800,000 روپے سے زائد آمدنی = 1,837,875 - 1,800,000

= روپے 37,875

17.5% کی شرح سے انکم ٹیکس = $\frac{17.5}{100} \times 37,875$

= روپے 6,628.12

کل انکم ٹیکس = 140,000 + 6,628.12

= روپے 146,628.12

مثال 3: ایک شخص کی سالانہ آمدنی 2,085,000 روپے ہے۔ اگر اُس نے 52,125 روپے زکوٰۃ ادا کی ہو تو انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{روپے } 2,085,000 &= \text{سالانہ آمدنی} \\ \text{روپے } 52,125 &= \text{زکوٰۃ کی رقم} \\ \text{2,085,000} - 52,125 &= \text{قابل ٹیکس آمدنی} \\ &= \text{روپے } 2,032,875 \end{aligned}$$

دی گئی آمدنی پر ٹیکس کی شرح قابل ٹیکس آمدنی کے چارٹ کے سیریل نمبر 6 کے مطابق ہوگی۔

یعنی 140,000 روپے کے ساتھ 1,800,000 روپے سے زائد پر 17.5%

$$\begin{aligned} 2,032,875 - 1,800,000 &= \text{روپے } 1,800,000 \text{ سے زائد آمدنی} \\ &= \text{روپے } 232,875 \end{aligned}$$

$$17.5\% \text{ کی شرح سے انکم ٹیکس} = \frac{17.5}{100} \times 232,875$$

$$= \text{روپے } 40,753$$

$$\text{کل انکم ٹیکس} = 140,000 + 40,753$$

$$= \text{روپے } 180,753$$

مثال 4: ایک شخص کی سالانہ آمدنی 385,000 روپے ہے۔ سالانہ انکم ٹیکس معلوم کریں۔

$$\text{روپے } 385,000 = \text{سالانہ آمدنی}$$

حل:

دی گئی آمدنی پر ٹیکس کی شرح قابل ٹیکس آمدنی کے چارٹ کے سیریل نمبر 1 کے مطابق ہوگی۔

یعنی 0% ٹیکس، اس کا مطلب ہے اس شخص کے ذمہ ٹیکس واجب الادا نہیں ہے۔

مشق 4.8

قابل ٹیکس آمدنی کے چارٹ کی مدد سے سوالات حل کریں۔

1- ایک شخص کی سالانہ آمدنی 420,000 روپے ہے۔ 5% کے حساب سے انکم ٹیکس معلوم کریں۔

2- ایک شخص کی سالانہ آمدنی 1,085,000 روپے ہے۔ 10% کے حساب سے انکم ٹیکس معلوم کریں۔

- 3- ایک شخص کی سالانہ تنخواہ 1,475,000 روپے ہے۔ ٹیکس کی شرح %12.5 ہے۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔
- 4- ایک شخص کی سالانہ تنخواہ 1,650,000 روپے ہے۔ ٹیکس کی شرح %15 ہے۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔
- 5- ایک شخص کی سالانہ آمدنی 2,350,000 روپے ہے۔ ٹیکس کی شرح %17.5 ہے۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔
- 6- ایک شخص کی سالانہ آمدنی 2,875,000 روپے ہے۔ ٹیکس کی شرح %20 ہے۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔
- 7- ایک تنخواہ دار کی سالانہ آمدنی 3,375,000 روپے ہے۔ ٹیکس کی شرح %22.5 ہے۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔
- 8- ایک شخص کی سالانہ آمدنی 3,987,000 روپے ہے۔ ٹیکس کی شرح %25 ہے۔ انکم ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔
- 9- ایک شخص نے اپنے کاروبار سے 12,735,000 روپے کمائے۔ ٹیکس کی شرح %30 ہے۔ اُس نے 200,000 روپے ٹیکس کی رقم پہلے ہی ادا کر دی ہے۔ معلوم کیجیے اُسے مزید کتنا ٹیکس ادا کرنا ہے؟

جائزہ مشق 4

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیئے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) تناسب سے کیا مراد ہے؟

- (a) دو نسبتوں کی برابری (b) دو مقداروں کی برابری
(c) دو نسبتوں کی نابرابری (d) دو مقداروں کی نابرابری

(ii) اگر شرح مبادلہ 1 امریکی ڈالر = 104 روپے ہو تو 2600 روپے کتنے ڈالر کے برابر ہیں؟

- (a) 25 امریکی ڈالر (b) 250 امریکی ڈالر
(c) 2,500 امریکی ڈالر (d) 2.50 امریکی ڈالر

(iii) ایسے ادارے کا نام بتائیں جس میں رقم جمع کروائی جاسکے، قرض دے سکے اور دوسری خدمات بھی پیش کرے:

- (a) بینک (b) لیزنگ کمپنی
(c) اے۔ٹی۔ ایم مشین (d) کریڈٹ کارڈ کمپنی

(iv) اے ٹی ایم (ATM) سے کیا مراد ہے؟

- (a) اکاؤنٹ ٹرانسفر مشین (b) آٹومیٹڈ ٹیلر مشین
(c) آٹو کیش ٹرانسفر مشین (d) اکاؤنٹ ٹیلر مشین

(v) وہ شخص جو انشورنس کمپنی سے لائف انشورنس کروائے اُسے کیا کہتے ہیں؟

- (a) بیمہ دار (b) بیمہ کمپنی
(c) لیزر (d) نفع پانے والا

(vi) وہ شخص جو بینک میں رقم جمع کرواتا ہے اسے کیا کہتے ہیں؟

- (a) کھاتہ دار (b) ملاقاتی
(c) قرض دار (d) رقم نکالنے والا

(vii) اگر ایک کھلونے کی قیمت 100 روپے ہو اور اسے 10% کٹوتی پر فروخت کیا جائے تو اُس کی قیمت فروخت کیا ہوگی؟

- (a) 90 روپے (b) 110 روپے
(c) 80 روپے (d) 120 روپے

(viii) دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے تعلق کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) مرکب تناسب (b) تناسب راست
(c) معکوس تناسب (d) بالواسطہ تناسب

(ix) شرح زکوٰۃ کتنے فیصد ہوتی ہے؟

- (a) 10 (b) 2.5
(c) 25 (d) 0.25

(x) 200,000 روپے پر بحساب 4% انکم ٹیکس کتنا ہوگا؟

- (a) 8,000 روپے (b) 80,000 روپے
(c) 4,000 روپے (d) 2,000 روپے

2- درج ذیل کی تعریف کریں۔

(i) تناسب (ii) مرکب تناسب (iii) شراکت (iv) کمرشل بینک (v) نیگیوشی ایبل انسٹرومنٹس

3- چیک، ڈیمانڈ ڈرافٹ اور پی آرڈر میں کیا فرق ہے؟

4- ایک ٹرائی سائیکل کی قیمت 4,000 روپے ہے۔ اس پر 16% سیلز ٹیکس لگا یا گیا۔ ایسی 30 سائیکلوں پر سیلز ٹیکس کی رقم معلوم کریں۔

5- ایک شخص نے ایک سال میں 8,000,000 روپے کمائے۔ زکوٰۃ 200,000 روپے ادا کی۔ انکم ٹیکس کی شرح 30% ہے۔ اُس کا انکم ٹیکس معلوم کریں جبکہ وہ پہلے ہی 150,000 روپے ٹیکس ادا کر چکا ہے۔

- 6- عمار نے لائف انشورنس پالیسی 1,000,000 روپے میں خریدی جس کی شرح % 5 سالانہ ہے۔ سالانہ پریمیم معلوم کریں۔
- 7- ایک فیکٹری اشیا کی لاگت پر % 25 بڑھا کر قیمت لکھ دیتی ہے۔ ایک چیز کی لاگت 5,000 روپے ہے اور اُس کی قیمت فروخت 4,500 روپے ہے۔ بتائیے گا ہک کو کتنے فیصد رعایت دی گئی؟

خلاصہ

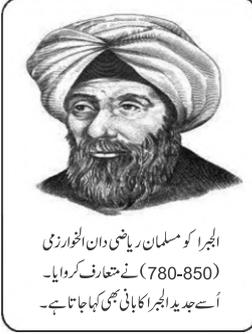
- دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو تناسب مرکب کہتے ہیں۔
- ایک کاروبار جس میں دو یا دو سے زیادہ اشخاص مل کر کاروبار کریں اور نفع و نقصان میں شریک ہوں شراکت کہلاتی ہے۔
- جب ایک شخص وفات پا جاتا ہے تو جو کچھ وہ چھوڑ کر مرتا ہے ترکہ کہلاتا ہے۔
- بینکنگ ایک ایسا کاروبار ہے جس میں لوگوں سے روپیہ وصول کیا جاتا ہے، اُس کی حفاظت کی جاتی ہے، لوگوں کو روپیہ قرض دے کر نفع کمایا جاتا ہے۔
- بینک کا کام لوگوں کی امانتوں کو اپنی تحویل میں رکھنا ہوتا ہے۔ گا ہوں کو قرض دینا اور دیگر سہولیات فراہم کرنا بھی ہوتا ہے، اس کام کا نام کمرشل بینکنگ ہے۔
- نفع و نقصان شراکتی سیونگ اکاؤنٹ، نفع و نقصان میں شراکت کی بنیاد پر ہوتا ہے۔
- کرنٹ ڈپازٹ اکاؤنٹ عام طور پر کاروباری لوگ کھولتے ہیں، جنہیں باقاعدگی سے کئی دفعہ بینک میں رقم جمع کروانا پڑتی ہے اور نکالنا پڑتی ہے۔ یہ مسلسل جاری رہنے والا اکاؤنٹ ہوتا ہے۔ بینک میں رکھی گئی رقم پر کسی قسم کا نفع نہیں دیا جاتا۔
- نفع و نقصان شراکتی ٹرم ڈپازٹ اکاؤنٹ پرسود نہیں ہوتا۔ کھاتہ دار کو چھ ماہ کے بعد بینک نفع کی ادائیگی کرتا ہے۔
- فارن کرنسی اکاؤنٹ پاکستانی کرنسی کے علاوہ غیر ملکی کرنسی میں کھولا جاتا ہے۔
- چیک بینک کے نام ایک آرڈر ہوتا ہے کہ مخصوص شخص کو درج شدہ رقم ادا کرے۔
- ڈیمانڈ ڈرافٹ رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ ہے جس میں بینک کی ایک برانچ اپنے ہی بینک کی دوسری برانچ سے مخصوص شخص کو ادا کرنے کے لیے کہتا ہے۔
- پے آرڈر، رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ ہے جس میں درج مخصوص شخص اس پر درج شدہ رقم کسی بھی بینک سے وصول کر سکتا ہے۔
- آن لائن بینکنگ میں انٹرنیٹ کے استعمال سے بینک اپنے گا ہوں کو سہولیات مہیا کرتا ہے کہ وہ اپنی رقم ایک اکاؤنٹ سے دوسرے اکاؤنٹ میں رقم کی منتقلی کروا سکتا ہے۔ یوٹیلیٹی بل ادا کر سکتا ہے۔
- اے۔ ٹی۔ ایم ایک الیکٹرانک مشین ہے، اس کے ذریعے کھاتہ دار اپنے اکاؤنٹ کا بیلنس معلوم کر سکتا ہے اور رقم نکلا سکتا ہے۔
- کریڈٹ کارڈ پلاسٹک کا ایک کارڈ ہوتا ہے اس کے ذریعے کھاتہ دار خریداری کر سکتا ہے۔

- ڈیٹ کارڈ کے ذریعے کھاتہ دار اپنے اکاؤنٹ سے رقم نکال سکتا ہے، خریداری کر سکتا ہے۔
- رقم جو بینک میں رکھی ہوتی ہے اُس کے استعمال کے بدلے میں بینک ہمیں کچھ رقم ادا کرتا ہے۔ اس اضافی رقم کو نفع کہتے ہیں۔
- جب ہم کوئی کاروبار چلانے کے لیے بینک سے قرض لیتے ہیں تو بینک اصل رقم کے علاوہ کچھ اضافی رقم بھی وصول کرتا ہے۔ اس اضافی رقم کو مارک اپ کہتے ہیں۔
- وہ رقم جو قرض دی جاتی ہے یا بینک میں رکھی جاتا ہے اصل زر کہلاتی ہے۔
- وہ شرح جس پر بینک مارک اپ وصول کرتا ہے یا نفع دیتا ہے، مارک اپ یا نفع کی شرح کہلاتی ہے۔
- کاروبار میں لگائی گئی مخصوص رقم کے دوران یہ کو مدت کہتے ہیں۔
- اوور ڈرافٹ ایک ایسی سہولت ہے جو بینک اپنے کھاتہ داروں کو مہیا کرتا ہے۔ وہ کھاتے میں موجود رقم سے زیادہ رقم نکلا سکتے ہیں۔
- زندگی کا بیمہ ایک معاہدہ ہے جو بیمہ دار اور بیمہ کمپنی کے درمیان ایک مقررہ مدت کے لیے ہوتا ہے۔ بیمہ کمپنی پابند ہوتی ہے کہ بیمہ دار کو اصل رقم اور منافع مقررہ مدت کے بعد ادا کرے۔ بیمہ دار کی موت کی صورت میں یہ رقم اُس کے مقرر کردہ افراد کو ادا کرے گی۔
- گاڑی کی انشورنس گاڑی کے چوری ہونے، حادثات کا شکار ہونے کے خطرہ کے پیش نظر انشورنس پالیسیاں خریدی جاتی ہیں۔
- انکم ٹیکس ایک شخص کی سالانہ آمدنی پر لگایا جاتا ہے۔ آمدنی کی حد حکومت مقرر کرتی ہے۔
- ایسی آمدنی جس پر انکم ٹیکس وصول نہیں کیا جاتا مستثنیٰ آمدنی کہلاتی ہے۔
- آمدنی میں سے مستثنیٰ رقم منہا کر دی جائے تو قابل ٹیکس آمدنی حاصل ہوتی ہے۔



اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مستقل، متغیر، حریف اور الجبری جملہ کو ذہن میں لاسکیں۔
- تعریف کرسکیں:
- کثیر رقمی
- کثیر رقمی کا درجہ
- کثیر رقمی کا عددی سر
- ایک، دو اور دو سے زیادہ متغیرات میں کثیر رقمی کی پہچان کرسکیں۔
- پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے درجے کی کثیر رقمی کی پہچان کرسکیں۔
- کثیر رقمیوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے عوامل کرسکیں۔
- کسی کثیر رقمی کو پہلے درجے کی کثیر رقمی سے تقسیم کرسکیں۔



5.1 الجبری جملے (Algebraic Expressions)

ایسا جملہ جو الجبری عوامل (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر) کے ذریعے متغیرات اور مستقلات کو ملائے الجبری جملہ کہلاتا ہے۔ الجبر اہلیات بنانے میں مدد کرتا ہے۔ اس لیے کہ اس کا تعلق حساب سے ہوتا ہے مثلاً $x^2 + 2x + 1$ اور $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ جبکہ $x \neq 0$ الجبری جملے ہیں۔

5.1.1 مستقل، متغیر، حرئی مقدار اور الجبری جملہ کی پہچان

• مستقل (Constant)

علامت جس کی ایک مقررہ عددی قیمت ہو مستقل کہلاتی ہے۔ مثلاً $5x + 7$ میں 5 اور 7 مستقلات ہیں جبکہ 7 ایک مستقل مقدار ہے۔

• متغیر (Variable)

ایسی علامت جس کی قیمت تغیر پذیر ہو یعنی وہ مختلف عددی قیمتیں اختیار کر سکے متغیر کہلاتی ہے انہیں نامعلوم بھی کہتے ہیں۔ مثلاً $x^2 + y + 3z$ میں x, y, z اور z متغیرات ہیں۔

• حرئی مقدار (Literal)

ایسے حروف تہجی کو جو مستقل مقداروں کو یا عددی سروں کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوں حرئی مقداریں کہتے ہیں۔ مثلاً $ax^2 + bx + c$ میں a, b, c اور c حرئی مقداریں ہیں جب کہ x ایک متغیر ہے۔

• الجبری جملہ (Algebraic Expression)

ایسا جملہ جو الجبری عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے ذریعے متغیرات اور مستقلات کو ملائے الجبری جملہ کہلاتا ہے۔ چند ایک الجبری جملے نیچے دیے جاتے ہیں۔

$$(i) \quad 14 \quad (ii) \quad x + 2y \quad (iii) \quad 4x - y + 5 \quad (iv) \quad \frac{-2}{x} + y \quad (v) \quad 3y + 7z - \frac{5}{7}$$

5.2 کثیر رقمی (Polynomial)

5.2.1 تعریفیں

• کثیر رقمی

کثیر رقمی جملہ یا کثیر رقمی ایک ایسا الجبری جملہ ہوتا ہے جس میں ایک یا ایک سے زیادہ رقوم ہو سکتی ہیں اور متغیرات میں سے ہر ایک کا قوت نما صفر یا مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔ مثلاً $13 - x, 5x + 3y, x^2 - 3x + 1$ کثیر رقمیاں ہیں جبکہ درج ذیل کثیر رقمیاں نہیں ہیں۔

$$x^{-2}, \frac{1}{y}, x^3 - x^{-3} + 3, x^2 + y^{-4} - 7, \frac{x}{y} + 5x$$

• کثیر رقمی کا درجہ
کثیر رقمی کا وہی درجہ ہوتا ہے جو اس میں موجود رقم میں بڑے درجے کی ہوتی ہے۔ اگر کسی رقم میں ایک سے زیادہ متغیرات ہوں تو ان کے قوت نماؤں کو جمع کر کے اس کا درجہ معلوم کیا جاتا ہے۔ مثلاً $2x^3y^4$ کا درجہ $3 + 4 = 7$ ہے۔

• متغیر کا عددی سر
اگر کسی متغیر کو کسی عدد (مستقل) سے ضرب دی جائے تو یہ اس متغیر کا عددی سر (Coefficient) کہلاتا ہے۔
 $4x + 6y$ میں x کا عددی سر 4 اور y کا عددی سر 6 ہے۔ اور یہ دونوں (4,6) مستقلات بھی کہلاتی ہیں۔

5.2.2 ایک، دو اور دو سے زیادہ متغیرات میں کثیر رقمی کی پہچان

(a) ایک متغیر میں کثیر رقمیاں
درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔
(i) $x^4 + 4$ (ii) $x^2 - x + 1$ (iii) $y^3 + y^2 - y + 1$ (iv) $y^2 - y + 8$
کثیر رقمیوں (i)، (ii) میں x اور (iii)، (iv) میں y متغیرات ہیں۔ یہ تمام کثیر رقمیاں ایک متغیر میں کثیر رقمیاں ہیں۔

(b) دو متغیرات میں کثیر رقمیاں
درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔
(i) $x^2 + y + 2$ (ii) $x^2y + xy + 6$ (iii) $x^2z + xz + z$ (iv) $x^2z + 8$
کثیر رقمیوں (i)، (ii) میں x اور (iii)، (iv) میں z ، x متغیرات ہیں۔ یہ تمام کثیر رقمیاں دو متغیرات میں کثیر رقمیاں ہیں۔

(c) زیادہ متغیرات میں کثیر رقمیاں
اسی طرح کثیر رقمی $x^2yz + xy^2z + xy + 7$ تین متغیرات x ، y اور z میں کثیر رقمی ہے۔

5.2.3 مختلف درجات کی کثیر رقمیوں کی پہچان یعنی یک درجی، دو درجی، سہ درجی اور چہار درجی کثیر رقمیوں کی پہچان

• یک درجی کثیر رقمی (Linear Polynomial)
درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔
(i) $x + 2$ (ii) x (iii) $x + 2y$ (iv) $x + z$
ان تمام کثیر رقمیوں میں متغیرات کا درجہ ایک ہے یہ تمام یک درجی کثیر رقمیاں ہیں۔

• دو درجی کثیر رقمی (Quadratic Polynomial)
درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔

(i) x^2 (ii) $x^2 - 3$ (iii) $xy + 1$

پہلی دو کثیر رقمیوں میں x متغیر ہے اور اس کا درجہ 2 ہے۔ تیسری کثیر رقمی میں x ، y متغیرات ہیں اور ان کے قوت نماؤں کا مجموعہ $1 + 1 = 2$ ہے اس کا درجہ بھی 2 ہے۔ لہذا (i)، (ii) اور (iii) کثیر رقمیاں دو درجی ہیں۔

• سہ درجی کثیررقمی (Cubic Polynomial)

درج ذیل کثیررقمیوں پر غور کریں۔

(i) $5x^3 + x^2 - 4x + 1$

(ii) $x^2y + xy^2 + y - 2$

ان میں سے ہر ایک کثیررقمی کا درجہ 3 ہے۔ یہ دونوں سہ درجی کثیررقمیاں ہیں۔

• چہار درجی کثیررقمی (Biquadratic Polynomial)

آئیے چند چہار درجی کثیررقمیاں لیتے ہیں۔

(i) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + y^3 - 1$

(ii) $y^4 + y^3 - y^2 - y + 8$

ان دونوں کثیررقمیوں کا درجہ 4 ہے۔

مشق 5.1

1- جملوں میں دی گئی مستقل مقداریں لکھیں۔

(i) $3x + 4$

(ii) $2x^3 - 1$

(iii) $5y + 2x$

(iv) $7y^2 - 8$

2- مساواتوں میں دیے گئے متغیرات لکھیں۔

(i) $2x - 1 = 0$

(ii) $y + x = 3$

(iii) $x^2 - x - 1 = 0$

(iv) $7y^2 - 2y + 3 = 0$

3- مساواتوں میں لکھی گئی حرفی مقداروں کے نام لکھیں۔

(i) $ax^2 + bx + c - y = 0$

(ii) $cx^2 + dx = 0$

(iii) $bx + d = 0$

(iv) $ay^2 + d = 0$

4- کثیررقمیوں اور ایسے جملوں کو علیحدہ کریں جو کثیررقمیاں نہیں ہیں۔

(i) $x^2 + x - 1$

(ii) $x^2y + xy^2 + 7$

(iii) $x^{-2} + y + 7$

(iv) $\frac{x}{y^2} + 1 - \frac{y^2}{x}$

(v) $x^3 - x^2 + y - 1$

(vi) $x^4 + x^2 + 5x + \frac{1}{2}$

5- درج ذیل جملوں میں کون کون سے مستقلات دیے گئے ہیں؟

(i) $7x - 6y + 3z$

(ii) $5x^2 - 3$

(iii) $8x^2 + 2y + 5$

(iv) $9y + 3x - 2z$

6- نیچے دی گئی کثیررقمیوں میں سے ہر ایک کا درجہ لکھیں۔

(i) $x + 1$

(ii) $x^2 + x$

(iii) $x^3 - xy + 1$

(iv) $x^2y^2 + x^3 + y^2 - 1$

7- ایک درجی، دو درجی، سہ درجی اور چہار درجی کثیررقمیوں کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

(i) $3x + 1$

(ii) $x^2 - 2$

(iii) $y^2 - y$

(iv) $x + y$

(v) $x^3 + x^2 - 2$

(vi) $x^4 + x^3 + x^2$

(vii) $x^2y^2 + xy$

(viii) $x^2 + xy + 8$

5.3 کثیر رقمیوں پر عوامل (Operations on Polynomials)

5.3.1 کثیر رقمی جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب

(i) کثیر رقمیوں کی جمع (Addition of Polynomials)

اگر $P(x)$ اور $Q(x)$ دو کثیر رقمیاں ہوں تو ان کے مجموعہ کو $P(x) + Q(x)$ لکھا جاتا ہے۔ دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمی جملوں کو جمع کرنا مقصود ہوتا ہے متعلقہ متغیرات کے لحاظ سے ترتیب نزولی یا ترتیب صعودی میں لکھا جاتا ہے اور ایک جیسے متغیرات کو ایک

دوسرے کے نیچے لکھا جاتا ہے۔ اس طرح ایک جیسی رقم کو جمع کر لیا جاتا ہے

مثال 1: $3x^3 + 5x^2 - 4x$ ، $x^3 - 6 + 3x^2 - x$ اور $6 - x^2$ کو جمع کیجیے۔

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 5x^2 - 4x + 0 \\ x^3 + 3x^2 + 0x - 6 \\ 0x^3 - x^2 - x + 6 \\ \hline 4x^3 + 7x^2 - 5x \end{array}$$

$$\text{حاصل جمع : } \underline{4x^3 + 7x^2 - 5x}$$

(ii) کثیر رقمیوں کی تفریق (Subtraction of Polynomials)

اگر P اور Q دو کثیر رقمیاں ہوں تو ان کے فرق کو $P - Q$ یا $[P + (-Q)]$ لکھا جاتا ہے اگر دو کثیر رقمیوں کا مجموعہ صفر ہو تو ایک کثیر رقمی کو دوسری کثیر رقمی کی جمعی معکوس کہا جاتا ہے۔ اگر $P = x + y$ اور $Q = -x - y$ ہو تو $P + Q = (x + y) + (-x - y) = 0$ تفریق میں بھی کثیر رقمیوں کو ترتیب نزولی یا ترتیب صعودی میں لکھا جاتا ہے۔ جس کثیر رقمی کو تفریق کرنا ہوتا ہے اس کی رقوم کی علامات کو بدل دیا جاتا ہے اور پھر جمع کا عمل کیا جاتا ہے۔

مثال 2: $x - 4x^2 + 8 - 2x^3 - 9$ کو $5x^4 + x - 3x^2 - 9$ میں سے تفریق کریں۔

حل: دونوں کثیر رقمیوں کی رقوم کو ترتیب نزولی میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 9 \\ \pm 0x^4 \pm 2x^3 \mp 4x^2 \mp x \pm 8 \\ \hline 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 17 \end{array}$$

$$\text{فرق : } \underline{5x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 17}$$

(iii) کثیر رقمیوں کی ضرب (Multiplication of Polynomials)

کثیر رقمیوں کی آپس میں ضرب کو مثالوں کی مدد سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 3: $4x^2$ اور $5x^3$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

$$(4x^2)(5x^3) = 4 \times 5(x^2 \times x^3) \quad (\text{اصول تلازم})$$

$$= (20)(x^2 \times x^3)$$

$$= 20x^{2+3} \quad (\text{قوت نماؤں کا قانون})$$

$$= 20x^5$$

مثال 4: $3x^2 + 2x - 4$ اور $5x^2 - 3x + 3$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: افقی طریقہ (Horizontal Method)

$$\begin{aligned} & (3x^2 + 2x - 4)(5x^2 - 3x + 3) \\ &= 3x^2(5x^2 - 3x + 3) + 2x(5x^2 - 3x + 3) - 4(5x^2 - 3x + 3) \\ &= 15x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 10x^3 - 6x^2 + 6x - 20x^2 + 12x - 12 \\ &= 15x^4 + (10 - 9)x^3 + (9 - 6 - 20)x^2 + (6 + 12)x - 12 \\ &= 15x^4 + x^3 - 17x^2 + 18x - 12 \end{aligned}$$

مثال 5: $2x - 3$ کو $5x + 6$ سے ضرب دیں۔

حل: عمودی طریقہ (Vertical Method)

$$\begin{array}{r} 5x + 6 \\ \times 2x - 3 \\ \hline 10x^2 + 12x \\ - 15x - 18 \\ \hline 10x^2 - 3x - 18 \end{array}$$

نوٹ: دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب بھی ایک کثیر رقمی ہوتی ہے اور اس کا درجہ دونوں کثیر رقمیوں کے درجہ کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

5.3.2 کثیر رقمیوں کی تقسیم (Division of Polynomials)

تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔ کثیر رقمیوں کی تقسیم مثالوں کی مدد سے واضح کی جاتی ہے۔

مثال 6: $(-8x^5)$ کو $(-4x^3)$ سے تقسیم کریں۔

$$\begin{aligned} \text{حل: } (-8x^5) \div (-4x^3) &= (-8x^5) \times \frac{1}{-4x^3} \\ &= 2x^{5-3} \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

مثال 7: $x^3 - 2x + 4$ کو $x + 2$ پر تقسیم کریں۔

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ x + 2 \overline{) x^3 + 0x^2 - 2x + 4} \\ \underline{\pm x^3 \pm 2x^2} \\ -2x^2 - 2x \\ \underline{\mp 2x^2 \mp 4x} \\ 2x + 4 \\ \underline{\pm 2x \pm 4} \\ 0 \end{array}$$

نوٹ: اگر ایک کثیر رقمی دوسری کثیر رقمی کو پورا پورا تقسیم کرے تو باقی صفر حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.2

-1 جمع کیجیے۔

- (i) $1 + 2x + 3x^2, 3x - 4 - 2x^2, x^2 - 5x + 4$
(ii) $a^3 + 2a^2 - 6a + 7, a^3 + 2a + 5, 2a^3 + 2a - a^2 - 8$
(iii) $a^3 - 2a^2b + b^3, 4a^3 + 2ab^2 + 6a^2b, 2b^3 - 5a^3 - 4a^2b$

-2 P میں سے Q تفریق کریں۔

- (i) $P = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x$; $Q = 4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$
(ii) $P = 2x + 3y - 4z - 1$; $Q = 2y + 3x - 4z + 1$
(iii) $P = a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + b^3$; $Q = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

-3 $x - 2y + 3z$ کی قیمت معلوم کریں

جبکہ $x = 2a^2 - a^3 + 3a + 4$

$y = 2a^3 - 3a^2 + 2 - 2a$

اور $z = a^4 + 3a^3 - 6 - 5a^2$

-4 دو کثیررتیوں کا مجموعہ $x^2 + 2x - y^2$ ہے اگر ایک کثیررتی $3x^2 - 2xy + x^2$ ہو تو دوسری کثیررتی معلوم کریں۔-5 $4x + 6 - 2x^2$ کو $x^3 + x^2 - 2x$ اور $2x^3 + 3x - 7$ کے مجموعہ میں سے تفریق کریں۔

-6 درج ذیل کثیررتیوں کی حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ (ii) $(3x^2 - 7x + 5)(4x^2 - 2x + 1)$

(iii) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

-7 اگر $P = x^2 - yz$ ، $Q = y^2 - xz$ اور $R = z^2 - xy$ تو PQ, QR, PR اور PQR معلوم کریں۔

-8 مختصر کیجیے:

(i) $(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$ (ii) $(x^3 - 19x - 30) \div (x + 3)$

(iii) $(x^5 - y^5) \div (x - y)$ (iv) $(x^3 + x^2 - 14x - 24) \div (x + 2)$

(v) $(16a^5 + 4a^3 - 4a^2 + 3a - 1) \div (4a^2 - 2a + 1)$

(vi) $(x^4 - 3x^2y^2 + y^4) \div (x^2 + xy - y^2)$

-9 $4x^3 - 10x^2 + 12x + 6$ میں کیا جمع کیا جائے کہ $2x + 1$ سے پورا پورا تقسیم کر دے؟-10 دو کثیررتیوں کا حاصل ضرب $6y^3 - 11y^2 + 6y - 1$ ہے اگر ان میں سے ایک کثیررتی $3y^2 - 4y + 1$ ہو تو دوسری کثیررتی

معلوم کریں۔

-11 p کی کس قیمت کے لیے کثیررتی $x - 3$ کثیررتی $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ کو پورا پورا تقسیم کر دے گی؟

جائزہ مشق 5

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

- (i) الجبر میں $4x + 2y + 3z$ کو کیا کہیں گے؟
 (a) الجبری جملہ (b) مساوات (c) غیر مساوات (d) علامت
- (ii) حرف تہجی جو مختلف قیمتیں لے سکتا ہے کیا کہلاتا ہے؟
 (a) مستقل (b) متغیر (c) رقم (d) عدد
- (iii) $2x - 3y + 4z$ میں متغیرات کی تعداد بتائیے:
 (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5
- (iv) متغیرات کو کس طرح سے ظاہر کیا جاتا ہے؟
 (a) مستقلات (b) اعداد (c) حروف تہجی (d) حرنی مقدریں
- (v) الجبری جملوں میں کیا کیا شامل ہوتا ہے؟
 (a) عدد اور عوامل (b) اعداد، متغیرات اور عوامل (c) صرف متغیرات (d) صرف عوامل
- (vi) الجبر میں $2x^{-2}$ کو کیا کہتے ہیں؟
 (a) کثیررتبی (b) غیر کثیررتبی (c) مستقل رقم (d) غیر مساوات
- (vii) $3x^2 + 2x - 1$ میں کثیررتبی کا درجہ کتنا ہے؟
 (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
- (viii) ایک کثیررتبی میں جس عدد سے متغیر کو ضرب دی جائے اُسے کیا کہتے ہیں؟
 (a) عدد (b) عددی سر (c) انڈیکس (d) مستقل
- (ix) $3y^2$ کثیررتبی کتنے درجے کی ہے؟
 (a) یک درجی (b) دو درجی (c) سہ درجی (d) چہار درجی
- (x) Biquadratic الجبری جملہ کتنے درجے کی کثیررتبی ہے؟
 (a) ایک (b) دو (c) تین (d) چار

2- درج ذیل جدول میں کثیررتبی کی قسم اور درجہ لکھیں۔

نمبر شمار	الجبری جملہ	کثیررتبی	کثیررتبی کا درجہ
i.	$2.3 + 1.2x$		
ii.	$k^2 + 5k^{-1} + 6$		
iii.	-9		
iv.	$2c^4 + 5b + \frac{6}{7}$		

3- درج ذیل کثیررتیوں کا مجموعہ معلوم کریں۔

- i. $2a + 3b + c, 3a - b - c, 4b + 5c, -2a + 3c, -b + c$
 ii. $9z + 3y^2 - 5x^3, -z - 2y^2 - 4x^3, z - x^3, -2z + 3y^2$

4- حل کریں۔

- i. $(-2x^2 + 5y^2 - 3z^2) - (5x^2 - 3y^2 - 6z^2)$
 ii. $(6x^3 + x^2 - 26) - (9 + 3x^2 - 5x^3)$
 iii. $(y^2 - 5)(-y^2 + 5)$
 iv. $(3a + 2b)(4a^2 - 7b + 5)$
 v. $(x^4 + x - 2) \div (x - 1)$

خلاصہ

- الجبری جملہ ریاضی کا ایسا جملہ ہوتا ہے جس میں اعداد، متغیرات جیسے x ، y اور جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عوامل ہوتے ہیں۔
- مستقلات الجبر میں ایسی علامات ہوتی ہیں جن کی قیمت مقرر ہوتی ہے اور وہ تبدیل نہیں ہوتی۔
- الجبر میں ایسی علامات جو مختلف عددی قیمتیں اختیار کر سکتی ہیں کو متغیرات کہتے ہیں۔
- حرف تہجی جو مستقلات اور عددی سر کے طور پر استعمال ہوں کو حرفی مقداریں کہتے ہیں۔
- الجبری جملے جن میں محدود رقوم ہوں اور متغیرات کے قوت نہ مکمل اعداد ہوں کثیررتیوں کہلاتے ہیں۔
- کثیررتی صفر ہو سکتی ہے اور اسے محدود رقوم کے مجموعہ کی غیر صفری صورت میں لکھا جاسکتا ہے۔
- کثیررتی میں عددی سر ایک ہوتا ہے جسے متغیرات کے ساتھ ضرب کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔
- جس کثیررتی کا درجہ ایک ہو اسے یک درجی کثیررتی کہتے ہیں۔
- جس کثیررتی کا درجہ دو ہو اسے دو درجی کثیررتی کہتے ہیں۔
- جس کثیررتی کا درجہ تین ہو اسے سہ درجی کثیررتی کہتے ہیں۔
- جس کثیررتی کا درجہ چار ہو اسے چہار درجی کثیررتی کہتے ہیں۔



اجزائے ضربی، ہمزا و مساواتیں (Factorization, Simultaneous Equations)

یونٹ-6

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- درج ذیل کلیات کا اعادہ کر سکیں۔
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- کلیہ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ کا اعادہ کر سکیں اور اسے مسائل کے حل میں استعمال کر سکیں۔
- $(102)^2$ ، $(1.02)^2$ ، $(98)^2$ اور $(0.98)^2$ کو مختصر کر سکیں۔
- $x^2 + \frac{1}{x^2}$ اور $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $x \pm \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم ہو۔
- درج ذیل اقسام کے جملوں کی تجزی کر سکیں:
- $a^2 \pm 2ab + b^2$
- $ac + ad + bc + bd$
- $Ka + kb + kc$
- $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
- $a^2 - b^2$
- درج ذیل کلیات کی پہچان کر سکیں اور انہیں مسائل کے حل کے لیے استعمال کر سکیں۔
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $x^3 + \frac{1}{x^3}$ اور $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $x \pm \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم ہو۔
- ایک اور دو متغیرات والی ایک درجی ہمزا و مساواتوں کی پہچان کر سکیں۔
- دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کو حل کر سکیں۔
- معلوم کر سکیں کہ:
- دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کا حل بہت سے مرتب جوڑے ہوتے ہیں۔
- دو متغیرات میں دو درجی ہمزا و مساواتوں کا حل صرف ایک مرتب جوڑا ہوتا ہے۔
- ہمزا و مساواتوں کو درج ذیل طریقوں سے حل کر سکیں:
- عددی سروں کو برابر کرنے کا طریقہ
- قیمت درج کرنے کا طریقہ
- ضرب چلیپائی کا طریقہ
- دو متغیرات میں دو ہمزا و مساواتوں کے روزمرہ زندگی سے متعلق مسائل حل کر سکیں۔
- دو مساواتوں میں سے ایک متغیر کو ساقط کر سکیں:
- قیمت درج کرنے کے طریقہ سے
- کلیات کے استعمال سے

6.1 بنیادی الجبری فارمولے

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \bullet$$

مثال 1: فارمولا کی مدد سے $(107)^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$(107)^2 = (100 + 7)^2 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &= (100)^2 + 2(100 \times 7) + (7)^2 \\ &= 10000 + 1400 + 49 \\ &= 11449 \end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \bullet$$

مثال 2: فارمولا کے استعمال سے $(87)^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$(87)^2 = (90 - 3)^2 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &= (90)^2 - 2(90 \times 3) + (3)^2 \\ &= 8100 - 540 + 9 \\ &= 7569 \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \bullet$$

مثال 3: فارمولا کے استعمال سے 107×93 کی قیمت معلوم کریں۔

$$107 \times 93 = (100 + 7)(100 - 7) \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &= (100)^2 - (7)^2 \\ &= 10000 - 49 \\ &= 9951 \end{aligned}$$

$$\text{مثال 4: } x - \frac{1}{x} = 2 \text{ اور } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ اور } x^4 + \frac{1}{x^4} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ}$$

$$x - \frac{1}{x} = 2 \quad \text{حل:}$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = (2)^2 \quad \text{طرفین کا مربع لینے سے}$$

$$\text{یا } x^2 - 2(x) \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$\text{یا } x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 + 2$$

$$\text{یا } x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$$

$$\text{یا } x^2 + \frac{1}{x^2} = (6)^2 \quad \text{طرفین کا دوبارہ مربع لینے سے}$$

$$\text{یا } (x^2)^2 + 2(x^2) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 36$$

$$\text{یا } x^4 + \frac{1}{x^4} = 36 - 2$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$$

مشق 6.1

فارمولوں کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل سوالات کو حل کریں۔

- 1- مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مربع معلوم کریں۔
 (i) 53 (ii) 77 (iii) 509 (iv) 1006
- 2- مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی قیمت معلوم کریں۔
 (i) $(57)^2$ (ii) $(95)^2$ (iii) $(598)^2$ (iv) $(1997)^2$
- 3- قیمت معلوم کریں۔
 (i) 46×54 (ii) 197×203 (iii) 999×1001 (iv) 0.96×1.04

$$x + \frac{1}{x} = 7 \text{ جبکہ } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ (i) -4}$$

$$x - \frac{1}{x} = 3 \text{ جبکہ } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ (ii)}$$

$$x - \frac{1}{x} = 1 \text{ جبکہ } x^4 + \frac{1}{x^4} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ (iii)}$$

6.2 اجزائے ضربی (Factorization)

اجزائے ضربی ایسے الجبری جملے ہوتے ہیں جن کا حاصل ضرب دیا ہوا جملہ ہو۔ دیے ہوئے جملوں کے حاصل ضرب کے اظہار کے عمل کو تجزی کہتے ہیں۔

(i) قسم $Ka + Kb + Kc$:

مثال 1: $2x - 4y + 6z$ کی تجزی کریں۔

$$2x - 4y + 6z \\ = 2(x - 2y + 3z) \quad (2 \text{ ایک مشترک جزو ضربی ہے})$$

مثال 2: $x^2 - xy + xz$ کی تجزی کریں۔

$$x^2 - xy + xz \\ = x(x - y + z)$$

مثال 3: $3x^2 - 6xy$ کی تجزی کریں۔

$$3x^2 - 6xy \\ = 3x(x - 2y)$$

مشق 6.2

مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

- | | | | |
|-----|------------------------------|-----|-------------------------------|
| 1. | $3x - 9y$ | 2. | $xy + xz$ |
| 3. | $6ab - 14ac$ | 4. | $3m^3np - 6m^2n$ |
| 5. | $30x^3 - 45xy$ | 6. | $17x^2y^2 - 51$ |
| 7. | $4x^3 + 3x^2 + 2x$ | 8. | $2p^2 - 4p^3 + 8p$ |
| 9. | $x^3y - x^2y + xy^2$ | 10. | $7x^4 - 14x^2y + 21xy^3$ |
| 11. | $x^2y^2z^2 - xyz^2 + xyz$ | 12. | $4x^3y^2 - 8xy + 4xy^3$ |
| 13. | $xy^4 - 3xy^3 - 6xy^2$ | 14. | $x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2$ |
| 15. | $77x^2y - 33xy^2 - 55x^2y^2$ | 16. | $5x^5 + 10x^4 + 15x^3$ |

ac + ad + bc + bd: (Type) قسم (ii)

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 4: $3x + cx + 3c + c^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 3x + cx + 3c + c^2 \\ &= (3x + cx) + (3c + c^2) \\ &= x(3 + c) + c(3 + c) \\ &= (3 + c)(x + c) \end{aligned}$$

مثال 5: $2x^2y - 2xy + 4y^2x - 4y^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 2x^2y - 2xy + 4y^2x - 4y^2 \\ &= 2y(x^2 - x + 2yx - 2y) \\ &= 2y[x(x - 1) + 2y(x - 1)] \\ &= 2y(x - 1)(x + 2y) \end{aligned}$$

مشق 6.3

مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

- | | | | |
|-----|-------------------------------|-----|-------------------------|
| 1. | $ax - by + bx - ay$ | 2. | $2ab - 6bc - a + 3c$ |
| 3. | $x^2 + 2x - 3x - 6$ | 4. | $x^2 + 5x - 2x - 10$ |
| 5. | $x^2 - 7x + 2x - 14$ | 6. | $x^2 + 3x - 4x - 12$ |
| 7. | $y^2 - 9y + 3y - 27$ | 8. | $x^2 - 8x - 4x + 32$ |
| 9. | $x^2 - 7x - 5x + 35$ | 10. | $x^2 - 13x - 2x + 26$ |
| 11. | $a(x - y) - b(x - y)$ | 12. | $y(y - a) - b(y - a)$ |
| 13. | $a^2(pq - rs) + b^2(pq - rs)$ | 14. | $ab(x + y) + cd(x + y)$ |

(iii) قسم (Type) $a^2 \pm 2ab + b^2$

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 6: $9a^2 + 30ab + 25b^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 9a^2 + 30ab + 25b^2 \\ &= (3a)^2 + 2(3a \times 5b) + (5b)^2 \\ &= (3a + 5b)^2 \end{aligned}$$

مثال 7: $16x^2 - 64x + 64$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 16x^2 - 64x + 64 \\ &= 16(x^2 - 4x + 4) \\ &= 16[(x)^2 - 2(2)(x) + (2)^2] \\ &= 16(x - 2)^2 \end{aligned}$$

مثال 8: $8x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 8x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3 \\ &= 2xy(4x^2 + 4xy + y^2) \\ &= 2xy[(2x)^2 + 2(2x)(y) + (y)^2] = 2xy(2x + y)^2 \end{aligned}$$

مشق 6.4

تجزی کریں۔

1. $x^2 + 14x + 49$
2. $9a^2 + 12ab + 4b^2$
3. $16 + 24a + 9a^2$
4. $25x^2 + 80xy + 64y^2$
5. $7a^4 + 84a^2 + 252$
6. $4a^2 + 120a + 900$
7. $x^2 - 34x + 289$
8. $49x^2 - 84x + 36$
9. $x^2 - 18xy + 81y^2$
10. $a^4 - 26a^2 + 169$
11. $2a^2 - 64a + 512$
12. $1 - 6a^2b^2c + 9a^4b^4c^2$
13. $4x^4 + 20x^3yz + 25x^2y^2z^2$
14. $\frac{9}{16}x^2 + xy + \frac{4}{9}y^2$
15. $\frac{49}{64}x^2 - 2xy + \frac{64}{49}y^2$
16. $\frac{a^2}{b^2}x^2 - \frac{2ac}{bd}xy + \frac{c^2y^2}{d^2}$
17. $16x^6 - 16x^5 + 4x^4$
18. $a^4b^4x^2 - 2a^2b^2c^2d^2xy + c^4d^4y^2$

(iv) قسم (Type) $a^2 - b^2$

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 9: $25x^2 - 64$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 25x^2 - 64 \\ &= (5x)^2 - (8)^2 \\ &= (5x + 8)(5x - 8) \end{aligned}$$

مثال 10: $16y^2b - 81bx^2$ کی تجزی کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & 16y^2b - 81bx^2 \\ &= b(16y^2 - 81x^2) \\ &= b[(4y)^2 - (9x)^2] \\ &= b(4y + 9x)(4y - 9x) \end{aligned}$$

مثال 11: $(3x - 5y)^2 - 49z^2$ کی تجزی کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & (3x - 5y)^2 - 49z^2 \\ &= (3x - 5y)^2 - (7z)^2 \\ &= (3x - 5y + 7z)(3x - 5y - 7z) \end{aligned}$$

مثال 12: $36(x + y)^2 - 25(x - y)^2$ کی تجزی کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & 36(x + y)^2 - 25(x - y)^2 \\ &= [6(x + y)]^2 - [5(x - y)]^2 \\ &= [6(x + y) + 5(x - y)][6(x + y) - 5(x - y)] \\ &= (11x + y)(x + 11y) \end{aligned}$$

مثال 13: $(677)^2 - (323)^2$ کو فارمولہ کی مدد سے حل کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & (677)^2 - (323)^2 \\ &= (677 + 323)(677 - 323) \\ &= 1000 \times 354 \\ &= 354000 \end{aligned}$$

مثال 14: $\frac{0.987 \times 0.987 - 0.643 \times 0.643}{0.987 + 0.643}$ کو مختصر کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & \frac{0.987 \times 0.987 - 0.643 \times 0.643}{0.987 + 0.643} \\ &= \frac{(0.987)^2 - (0.643)^2}{0.987 + 0.643} \\ &= \frac{(0.987 + 0.643)(0.987 - 0.643)}{0.987 + 0.643} \\ &= 0.987 - 0.643 \\ &= 0.344 \end{aligned}$$

مشق 6.5

مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 1. $9 - x^2$ | 2. $-6 + 6y^2$ |
| 3. $16x^2y^2 - 25a^2b^2$ | 4. $x^3y - xy^3$ |
| 5. $16a^2 - 400b^2$ | 6. $a^2b^3 - 64a^2b$ |
| 7. $7xy^2 - 343x$ | 8. $5x^3 - 45x$ |
| 9. $11(a + b)^2 - 99c^2$ | 10. $75 - 3(a - b)^2$ |

$$11. \frac{9x^2}{5} - \frac{36}{25}y^2$$

$$13. 16(a+b)^2 - 49(a-b)^2$$

$$15. (371)^2 - (129)^2$$

$$17. \frac{(0.567)^2 - (0.433)^2}{0.567 - 0.433}$$

$$12. 25 \frac{5x^2}{4} - 16 \frac{7x^2}{4}$$

$$14. 36 \frac{1x^2}{4} - 64 \frac{5x^2}{4}$$

مندرجہ ذیل کو مختصر کریں:

$$16. (674.17)^2 - (325.83)^2$$

$$18. \frac{(0.409)^2 - (0.391)^2}{0.409 - 0.391}$$

(v) قسم (Type): $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$

اس کی درج ذیل مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 15: $a^2 - 2ab + b^2 - 4c^2$ کی تجزی کریں۔

$$(a^2 - 2ab + b^2) - 4c^2$$

$$= (a-b)^2 - (2c)^2$$

$$= (a-b-2c)(a-b+2c)$$

مثال 16: $4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$ کی تجزی کریں۔

$$4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$$

$$= (2a)^2 + 2(2a)(b) + (b)^2 - 9c^2$$

$$= (2a+b)^2 - (3c)^2$$

$$= (2a+b-3c)(2a+b+3c)$$

مشق 6.6

تجزی کریں۔

$$1. a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$2. a^2 + 6ab + 9b^2 - 16c^2$$

$$3. a^2 + b^2 + 2ab - 9a^2b^2$$

$$4. x^2 - 4xy + 4y^2 - 9x^2y^2$$

$$5. 9a^2 - 6ab + b^2 - 16c^2$$

6.3 الجبری جملے کا عمل (Manipulation of Algebraic Expression)

• فارمولا: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

مثال 1: $(3a+4b)^3$ کو کھولیں۔

$$(3a+4b)^3$$

$$= (3a)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b) + (4b)^3$$

$$= 27a^3 + 36ab(3a+4b) + 64b^3$$

$$= 27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$$

• فارمولا: $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

اس فارمولا کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔
مثال 2: $(2a - 3b)^3$ کو کھولیں۔

$$\begin{aligned} & (2a - 3b)^3 \\ &= (2a)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b) - (3b)^3 \\ &= 8a^3 - 18ab(2a - 3b) - 27b^3 \\ &= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \end{aligned}$$

مثال 3: اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$x + \frac{1}{x} = 5 \quad \text{حل: ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (x)^3 + 3(x) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$(5)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(5) \quad \backslash \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 5$$

$$125 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 15$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 15$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 110$$

مشق 6.7

1- مندرجہ ذیل کے مکعب (Cube) معلوم کریں۔

(i) $x + 4$

(ii) $2m + 1$

(iii) $a - 2b$

(iv) $5x - 1$

(v) $2a + b$

(vi) $3x + 10$

(vii) $2m + 3n$

(viii) $4 - 3a$

(ix) $3x + 3y$

(x) $7 + 2b$

(xi) $4x - 2y$

(xii) $5m + 4n$

$$-2 \text{ اگر } x + \frac{1}{x} = 8 \text{ ہو تو } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-3 \text{ اگر } x - \frac{1}{x} = 3 \text{ ہو تو } x^3 - \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-4 \text{ اگر } x + \frac{1}{x} = 7 \text{ ہو تو } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-5 \text{ اگر } x - \frac{1}{x} = 2 \text{ ہو تو } x^3 - \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-6 \text{ مندرجہ ذیل کا فارمولے کی مدد سے کعب معلوم کریں۔}$$

(i) 13

(ii) 103

(iii) 0.99

6.4 ایک درجی ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Linear Equations)

دو یا دو سے زیادہ ایک متغیر میں ایک درجی مساواتیں ہمزاد ایک رکنی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

6.4.1 ایک اور دو متغیرات میں ایک درجی مساواتوں کی پہچان

ہم جانتے ہیں کہ ایک درجی مساوات ایک الجبری مساوات ہوتی ہے۔ جس کی ہر رقم مستقل مقدار، یا مستقل مقدار اور متغیر کا حاصل ضرب یا ایک متغیر ہو۔ ایک متغیر کی ایک درجی مساوات کی معیاری صورت یہ ہے:

$$ax + b, \quad \forall a, b \in R$$

اسی طرح دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کی صورت ہے $ax + by = c$ جبکہ a, b, c اور c مستقل مقدار ہیں۔ دو

ایک درجی مساواتیں ایک درجی مساواتوں کا ایک نظام بناتی ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$x + y = 2$$

$$x - y = 1$$

ایک دو متغیرات x اور y میں ایک درجی مساواتوں کا نظام ہے۔ یہ دو ایک درجی مساواتوں کا نظام، سادہ ترین ایک درجی نظام

ہے۔ اس کو عام طور پر یوں لکھا جاتا ہے:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

6.4.2 دو متغیرات میں ایک درجی مساوات بنانے کا تصور

دو متغیرات کو الجبری بیانات کی شکل میں لکھنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: ہر بیان کے لیے ایک مساوات لکھیں۔

(i) ایک کتاب کی قیمت اور 3 پینسلوں کی قیمت 90 روپے ہے۔

(ii) دو اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

(iii) ارم کا وزن علی کے وزن کا آدھا ہے۔

حل: (i) ایک کتاب کی قیمت اور 3 پینسلوں کی قیمت 90 روپے ہے:

فرض کیا کتاب کی قیمت x روپے اور ایک پینسل کی قیمت y روپے
ایک کتاب اور 3 پینسلوں کی قیمت $= 90$ روپے
مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے $x + 3y = 90$

(iii) ارم کا وزن علی کے وزن کا آدھا ہے:

فرض کیا ارم کا وزن x اور علی کا وزن y
مساوات کی صورت میں یوں لکھ سکتے ہیں $x = \frac{y}{2}$

(ii) دو اعداد کا مجموعہ 5 ہے:

فرض کیا پہلا عدد x اور دوسرا عدد y
مساوات کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے $x + y = 5$

6.4.3 دو متغیرات میں یک درجی مساوات کا حل

دو متغیرات میں یک درجی مساوات $ax + by = c$ کا حل ایک مترتب جوڑا ہے (x, y) جو اس مساوات کے دونوں اطراف کو برابر کرتا ہے۔ چونکہ ایک درجی مساوات ایک خط کو ظاہر کرتی ہے اس لیے یک درجی مساوات کے بہت سے حل ہوتے ہیں۔

مثال 2: $3x + y = 2$ کے چار حل معلوم کریں۔

حل: $3x + y = 2$

اب مساوات میں x کی جگہ 1 رکھیں تو

$$\begin{aligned} 3(1) + y &= 2 \\ 3 + y &= 2 \\ y &= 2 - 3 = -1 \end{aligned}$$

اس لیے دوسرا حل $(1, -1)$ ہے۔

اب مساوات میں x کی جگہ 3 رکھیں تو

$$\begin{aligned} 3(3) + y &= 2 \\ 9 + y &= 2 \\ y &= 2 - 9 = -7 \end{aligned}$$

اس لیے چوتھا حل $(3, -7)$ ہے۔

اس مساوات میں x کی جگہ 0 رکھیں تو

$$\begin{aligned} 3(0) + y &= 2 \\ 0 + y &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

اس لیے ایک حل $(0, 2)$ ہے۔

اب مساوات میں x کی جگہ 2 رکھیں تو

$$\begin{aligned} 3(2) + y &= 2 \\ 6 + y &= 2 \\ y &= 2 - 6 = -4 \end{aligned}$$

اس لیے تیسرا حل $(2, -4)$ ہے۔

پس دی ہوئی مساوات کے لاتعداد حل ہیں۔ یعنی $(0, 2), (1, -1), (2, -4), (3, -7), \dots$

• دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتوں کا حل

دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتیں ہمزاد مساواتوں کے نظام کو بناتی ہیں۔ x اور y کی قیمت جو ہر ایک مساوات کے لیے موزوں ہو۔ ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: دو یک درجہ مساواتیں $x + y = 5$ اور $x - y = 3$ کا حل $x = 4$ اور $y = 1$ ہے۔

$$\begin{array}{l|l} x + y = 5 & x - y = 3 \\ \text{L.H.S} = x + y & \text{L.H.S} = x - y \\ = (4) + (1) & = (4) - (1) \\ = 5 = \text{R.H.S} & = 3 = \text{R.H.S} \end{array}$$

پس $x = 4$ اور $y = 1$ ان مساواتوں کا حل ہے۔

مشق 6.8

1- نیچے دیے ہوئے بیانات کی مساوات لکھیں۔

- والد کی عمر اور بیٹی کی عمر کا فرق 26 سال ہے۔
- 6 بسکٹ کی قیمت برابر ہے ایک چاکلیٹ کی قیمت کے
- اگر ایک عدد کو دوسرے عدد کے 3 گنا میں جمع کریں تو مجموعہ 25 ہے۔
- دو اعداد کے مجموعے سے ان اعداد کے فرق کی حاصل تقسیم 1 ہے۔ (دوسرا عدد پہلے عدد سے چھوٹا ہے)
- کسی عمر کے دو گئے میں 7 سال کا اضافہ کرنے سے y سال بنتے ہیں۔

2- مساوات $2x + y = 3$ کے دو حل معلوم کریں۔ 3- مساوات $x + y = 2$ کے تین حل معلوم کریں۔

4- مساوات $y = 2x$ کے چار حل معلوم کریں۔ 5- کیا $(1, 2)$ حل ہے $x + y = 3$ اور $2x + 7y = 16$ کا؟

6- کون سا ایک $(3, 1)$ اور $(0, 3)$ میں سے حل ہے $x - y = 3$ اور $2x + 5y = 15$ کا؟

6.5 ہمزاد یک درجہ مساواتوں کا حل (Solution of Simultaneous Linear Equations)

ہمزاد یک درجہ مساواتوں کے حل سے مراد متغیرات کی ایسی قیمتیں معلوم کرنا ہے جن سے یہ مساواتیں درست فقرے بن جائیں۔ اب ہم ان ہمزاد یک درجہ مساواتوں کا حل معلوم کرتے ہیں۔

6.5.1 ہمزاد یک درجہ مساواتوں کا حل

ہمزاد یک درجہ مساواتوں کے حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ لیکن ہم یہاں صرف اپنے آپ کو تین طریقوں تک محدود رکھتے ہیں۔

• عددی سروں کو برابر کرنے کا طریقہ • قیمت درج کرنے کا طریقہ

• ضرب چلیپائی کا طریقہ (Cross Multiplication)

• عددی سروں کو برابر کرنے کا طریقہ

مثال 1: عددی سروں کے موازنے کے طریقے سے حل سیٹ معلوم کریں۔

$$\begin{array}{l} \text{حل:} \\ 9x + 8y = 1 \\ 5x - y = 6 \end{array}$$

$$9x + 8y = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$5x - y = 6 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

پہلا مرحلہ: مساوات (ii) کو مترادف مساوات میں اس طرح تبدیل کریں کہ متغیر کا عددی سر مساوات (i) کے برابر ہو جائے۔ اس لیے مساوات (ii) کی طرف سے 8 سے ضرب دیں۔

$$\begin{aligned} 8(5x - y) &= 8(6) \\ 40x - 8y &= 48 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

دوسرا مرحلہ: مساوات (i) اور (iii) کو جمع کریں تاکہ ایک متغیر کی قیمت معلوم کی جاسکے۔

$$\begin{array}{r} 9x + 8y = 1 \\ 40x - 8y = 48 \\ \hline 49x = 49 \\ \hline x = \frac{49}{49} = 1 \end{array}$$

تیسرا مرحلہ: مساوات (i) یا (ii) میں x کی قیمت درج کریں تاکہ y کی قیمت معلوم ہو سکے۔

$$\begin{aligned} 5x - y &= 6 \quad \dots\dots\dots (ii) \\ 5(1) - y &= 6 \\ 5 - y &= 6 \\ y = 5 - 6 &= -1 \end{aligned}$$

پس $x = 1$ اور $y = -1$ مطلوبہ حل ہے۔

چوتھا مرحلہ: جواب کی پڑتال کے لیے x اور y کی قیمتیں کسی ایک مساوات میں درج کریں۔

$$\begin{aligned} 9x + 8y &= 1 \\ \text{L.H.S} &= 9x + 8y \\ &= 9(1) + 8(-1) \\ &= 9 - 8 = 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

• قیمتیں درج کرنے کا طریقہ
مثال 2: قیمتیں درج کرنے کے طریقہ سے حل سیٹ معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 5 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 5 \quad \dots\dots\dots (i) \\ x + 2y &= 1 \quad \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

پہلا مرحلہ: کسی ایک دی ہوئی مساوات سے x یا y کی قیمت معلوم کریں۔

مساوات (ii) سے

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x &= 1 - 2y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

دوسرا مرحلہ: x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 5 \quad \dots\dots\dots (i) \\ 3(1 - 2y) + 5y &= 5 \\ 3 - 6y + 5y &= 5 \\ 3 - y &= 5 \\ y = 3 - 5 &= -2 \end{aligned}$$

تیسرا مرحلہ: x کی قیمت معلوم کرنے کے لیے y کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$x = 1 - 2y$$

$$x = 1 - 2(-2) = 1 + 4$$

$$x = 5$$

پس $x = 5$ اور $y = -2$ مطلوبہ حل ہے

چوتھا مرحلہ: جواب کی پڑتال کے لیے x اور y کی قیمتیں مساوات (i) یا مساوات (ii) میں درج کریں۔

$$3x + 5y = 5 \quad \text{مساوات (i) سے}$$

$$\text{L.H.S} = 3(5) + 5(-2)$$

$$= 15 - 10$$

$$= 5 = \text{R.H.S}$$

$$\text{L.H.S} = (5) + 2(-2) \quad \text{اب مساوات (iii) میں قیمتیں درج کرتے ہیں۔}$$

$$= 5 - 4$$

$$= 1 = \text{R.H.S}$$

• ضرب چلیبائی کا طریقہ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{..... (i) فرض کیا مساواتیں یہ ہیں:}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{..... (ii)}$$

مساوات (i) کو b_2 سے اور مساوات (ii) کو b_1 سے ضرب دینے سے

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \quad \text{..... (iii)}$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad \text{..... (iv)}$$

مساوات (iii) کو مساوات (iv) میں سے تفریق کرنے سے

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0$$

$$\pm a_1b_2x \pm b_1b_2y \pm b_2c_1 = 0$$

$$\underline{a_2b_1x - a_1b_2x + b_1c_2 - b_2c_1 = 0}$$

$$x(a_2b_1 - a_1b_2) = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{1}{b_1c_2 - b_2c_1}$$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{.....(A)}$$

اب مساوات (i) کو a_2 سے اور مساوات (ii) کو a_1 سے ضرب دینے سے

$$a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \quad \text{..... (v)}$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \quad \text{..... (vi)}$$

مساوات (v) کو مساوات (vi) میں سے تفریق کرنے سے

$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y + a_1 c_2 = 0$$

$$\pm a_1 a_2 x \pm a_2 b_1 y \pm a_2 c_1 = 0$$

$$a_1 b_2 y - a_2 b_1 y + a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$$

$$y (a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\frac{y}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \dots \dots \dots (B)$$

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{مساوات (A) اور (B) سے}$$

مندرجہ ذیل شکل کی مدد سے اوپر والے حل کو یاد کرنے میں مدد ملے گی۔

$$\begin{array}{c} x & & y & & 1 \\ a_1 & | & b_1 & \rightarrow & c_1 & \rightarrow & a_1 & \rightarrow & b_1 & | & c_1 \\ a_2 & | & b_2 & \rightarrow & c_2 & \rightarrow & a_2 & \rightarrow & b_2 & | & c_2 \end{array}$$

دو اعداد کے درمیان تیر کے نشان بتاتے ہیں کہ ان دو اعداد کو ضرب کرنا ہے۔ اور دوسری حاصل ضرب کو پہلی حاصل ضرب

میں سے تفریق کرنا ہے۔

مثال 3: مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل بذریعہ چلیپائی معلوم کریں۔

$$2x + y = 5$$

$$3x - 4y = 2$$

حل:

$$2x + y = 5 \quad \dots \dots \dots (i)$$

$$3x - 4y = 2 \quad \dots \dots \dots (ii)$$

دی ہوئی مساواتوں کو اس طرح لکھیں کہ دائیں طرف صفر ہو

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x - 4y - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x & & y & & 1 \\ 2 & | & 1 & \rightarrow & -5 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 1 & | & -5 \\ 3 & | & -4 & \rightarrow & -2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & -4 & | & -2 \end{array}$$

$$\frac{x}{(1)(-2) - (-4)(-5)} = \frac{y}{(-5)(3) - (-2)(2)} = \frac{1}{(2)(-4) - (3)(1)}$$

اب ہم فوراً حل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{x}{-2 - 20} = \frac{y}{-15 + 4} = \frac{1}{-8 - 3}$$

$$\frac{x}{-22} = \frac{y}{-11} = \frac{1}{-11}$$

$$x = \frac{-22}{-11} = 2 \quad \text{اور} \quad y = \frac{-11}{-11} = 1$$

پس $x = 2$ ، $y = 1$ مطلوبہ حل ہے۔

پڑتال کے لیے $x = 2$ اور $y = 1$ کو مساوات (i) میں درج کریں۔

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ \text{L.H.S} &= 2(2) + (1) \\ &= 4 + 1 = 5 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

مشق 6.9

1- مندرجہ ذیل کا حل سیٹ عددی سروں کے برابری کے طریقہ سے معلوم کریں۔

(i) $2x + 5y = -1$
 $x - 2y = 4$

(ii) $x + y = 2$
 $x - y = 0$

(iii) $2x + 3y = 3$
 $x + 5y = 5$

(iv) $x - 4y = 4$
 $4x - y = 16$

(v) $2x - 3y = 6$
 $3x + 5y = 0$

(vi) $3x - 4y = 7$
 $5x + y = 27$

2- مندرجہ ذیل کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے ساقط کرنے کا عمل قیمت درج کرنے کے طریقہ سے کریں۔

(i) $2x + 2y = 5$
 $x - 2y = 3$

(ii) $5x + 2y = 15$
 $-2x + y = 4$

(iii) $6x + y = 2$
 $x - 4y = 15$

(iv) $2x + 7y = 10$
 $3x + y = 3$

(v) $2x - 4y = -10$
 $y - 5x = -5$

(vi) $x + 8y = 15$
 $3x - y = 0$

3- مندرجہ ذیل کا حل سیٹ ضرب چلیپائی کے طریقہ سے معلوم کریں۔

(i) $2x - 7y = 11$
 $5x - 10y = 10$

(ii) $11x + 12y = 15$
 $12x + 11y = -23$

(iii) $2x - 9y + 10 = 0$
 $3x - 5y - 10 = 0$

(iv) $5x + y - 56 = 0$
 $x + 18y - 29 = 0$

(v) $9x - 11y - 15 = 0$
 $7x - 13y - 25 = 0$

(vi) $2y - 10x - 86 = 0$
 $2x + 5y - 11 = 0$

6.5.2 دو متغیرات میں دو ہمزاد یک درجی مساواتوں کے روزمرہ زندگی سے متعلق سوالات کا حل

مثال 4: ایک عدد دوسرے عدد کا نصف ہے۔ پہلے عدد کے تین گنا اور دوسرے عدد کے چار گنا کا مجموعہ 22 ہے۔ وہ اعداد معلوم کریں۔

حل: فرض کیا اعداد x اور y ہیں

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$x = \frac{y}{2} \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$3x + 4y = 22 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$x = \frac{y}{2} \quad \text{پ} \quad y = 2x \quad \dots\dots\dots \text{(iii)} \quad \text{مساوات (i) سے}$$

مساوات (ii) میں y کی قیمت درج کرنے سے

$$3x + 4(2x) = 22 \Rightarrow 3x + 8x = 22 \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{11} = 2$$

اب x کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$y = 2x \Rightarrow y = 2(2) = 4$$

پس اعداد 2 اور 4 ہیں

مثال 5: 11 سال پہلے علی کی عمر ولید کی عمر کا 5 گنا تھی۔ لیکن 7 سال بعد علی کی عمر ولید کی عمر کا 2 گنا ہوگی۔ ان کی عمریں معلوم کریں۔

حل: فرض کیا علی کی عمر = x سال اور ولید کی عمر = y سال

11 سال پہلے ان کی عمریں علی کی عمر = $(x - 11)$ سال اور ولید کی عمر = $(y - 11)$ سال

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\text{علی کی عمر} = 5(\text{ولید کی عمر})$$

$$x - 11 = 5(y - 11)$$

$$x - 11 = 5y - 55$$

$$x - 5y = -55 + 11$$

$$x - 5y = -44 \quad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

7 سال پہلے ان کی عمریں علی کی عمر = $(x + 7)$ سال اور ولید کی عمر = $(y + 7)$ سال

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\text{علی کی عمر} = 2(\text{ولید کی عمر})$$

$$x + 7 = 2(y + 7)$$

$$x + 7 = 2y + 14$$

$$x - 2y = 14 - 7$$

$$x - 2y = 7 \quad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) کو حل کرنے سے

$$x - 5y = -44 \quad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$\pm x \mp 2y = \pm 7 \quad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$$\hline -3y = -51 \quad (\text{تفریق کرنے سے})$$

$$y = 17$$

$$x - 2y = 7$$

$$x - 2(17) = 7$$

$$x - 34 = 7$$

$$x = 34 + 7 = 41$$

پس علی کی عمر = 41 سال اور ولید کی عمر = 17 سال

مثال 6: اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 5 جمع کریں تو حاصل کسر $\frac{1}{2}$ ہو جاتی ہے اور اگر شمار کنندہ اور نسب نما میں سے 3 کم کریں تو کسر $\frac{2}{5}$ ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔

حل: فرض کیا شمار کنندہ x اور نسب نما y ہے۔ اس لیے کسر $\frac{x}{y}$

دی ہوئی پہلی شرط کے مطابق

$$\frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x+5) = y+5$$

$$\Rightarrow 2x+10 = y+5$$

$$\Rightarrow 2x-y = -5$$

$$y = 2x+5 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{2}{5}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$5(x-3) = 2(y-3)$$

$$5x-15 = 2y-6$$

$$5x-2y = 15-6$$

$$5x-2y = 9 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) سے y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$5x-2(2x+5) = 9$$

$$5x-4x-10 = 9$$

$$x-10 = 9$$

$$x = 10+9 = 19$$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$y = 2x+5$$

$$y = 2(19)+5$$

$$y = 38+5$$

$$y = 43$$

پس مطلوبہ کسر $\frac{19}{43}$ ہے

مشق 6.10

- 1- احمد نے ایک عدد کے دو گنے میں 5 جمع کیا۔ پھر اس نے حاصل جمع میں سے عدد کا نصف تفریق کیا۔ آخر میں اس نے 8 حاصل کیا۔ عدد معلوم کریں۔
- 2- اگر ہم ایک عدد کے آدھے میں 3 جمع کرنے سے وہی نتیجہ حاصل کرتے ہیں جو ہم عدد کے چوتھائی میں سے 1 تفریق کرنے سے حاصل کرتے ہیں۔ تو عدد معلوم کریں۔
- 3- دو اعداد کا مجموعہ 5 ہے اور ان کا فرق 1 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

یہاں مساوات (iii) $x = 5 - a$ کے لیے درست ہے اور مساوات (iv) $x = 4 - b$ کے لیے درست ہے۔ لیکن دونوں مساواتوں کے لیے x کی صرف ایک ہی قیمت درست معلوم کرنے کے لیے:

ہم دونوں قیمتوں کو ایک دوسرے کے برابر لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 5 - a &= 4 - b \\ \Rightarrow a - b &= 5 - 4 \\ \Rightarrow a - b &= 1 \quad \dots\dots\dots (v) \end{aligned}$$

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ایک نیا تعلق (v) قائم ہو گیا ہے جس میں x نہیں ہے۔ اس عمل کو اسقاط کہتے ہیں اور تعلق $a - b = 1$ کو اسقاط کیا ہوا کہتے ہیں۔

(a) دو مساواتوں میں سے ایک متغیر کو قیمت درج کرنے کے طریقہ سے اسقاط کرنا

مثال 7: قیمت درج کرنے کے طریقہ سے نیچے دی گئی مساواتوں سے x کو اسقاط کریں۔

$$ax - b = 0$$

$$cx - d = 0$$

حل: دی ہوئی مساواتیں ہیں:

$$ax - b = 0 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$cx - d = 0 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$ax = b \quad \text{or} \quad x = \frac{b}{a} \quad \text{مساوات (i) میں سے}$$

$$c \frac{b}{a} - d = 0 \quad \text{مساوات (ii) میں درج کرنے سے}$$

$$\Rightarrow bc - ad = 0$$

$$\Rightarrow bc = ad \quad \text{یہ مطلوبہ تعلق ہے جس میں سے } x \text{ کو اسقاط کیا گیا ہے۔}$$

مثال 8: مساواتوں میں سے x کو بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقہ سے اسقاط کریں۔

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\ell x + m = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\ell x + m = 0 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$\ell x + m = 0 \quad \text{مساوات (ii) میں سے}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-m}{\ell}$$

x کی قیمت کو مساوات (i) میں درج کرنے سے

- 4- دو اعداد کا فرق 4 ہے۔ ایک عدد کے دو گئے میں دوسرے کے تین گنا کو جمع کرنے سے 43 حاصل ہوتا ہے۔ اعداد معلوم کریں۔
- 5- عدنان، عدیل سے 7 سال بڑا ہے۔ عدنان کی عمر کا $\frac{1}{4}$ عدیل کی عمر کے $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے۔ ان کی عمریں معلوم کریں۔
- 6- 5 سال پہلے احسان کی عمر شکیل کی عمر کا 7 گنا تھا۔ لیکن 3 سال بعد احسان کی عمر شکیل کی عمر کا 4 گنا ہو جائے گی۔ ان کی عمریں معلوم کریں۔
- 7- ایک کسر کا نسب نما اس کے شمار کنندہ سے 5 بڑا ہے۔ لیکن اگر اس کے شمار کنندہ اور نسب نما میں سے 2 تفریق کریں تو ہمیں $\frac{1}{6}$ کسر حاصل ہوتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔
- 8- فدانی 3 کلوگرام خربوزے اور 4 کلوگرام آم 470 روپے میں خریدے۔ انعم نے 5 کلوگرام خربوزے اور 6 کلوگرام آم 730 روپے میں خریدے خربوزوں اور آموں کی فی کلوگرام قیمت معلوم کریں۔
- 9- 2 فٹ بالوں اور 10 باسکٹ بالوں کی قیمت 2,300 روپے ہے اور 7 فٹ بالوں اور 5 باسکٹ بالوں کی قیمت 2,650 روپے ہے۔ ہر ایک فٹ بال اور باسکٹ بال کی قیمت معلوم کریں۔
- 10- اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کی کمی کی جائے تو کسر $\frac{2}{3}$ حاصل ہوتی ہے اور اگر اسی کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ میں 2 کی کمی کریں تو یہ کسر $\frac{1}{3}$ ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔
- 11- اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کی کمی کی جائے تو کسر $\frac{1}{2}$ حاصل ہوتی ہے اور اگر اسی کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ میں 3 کی کمی کریں تو کسر $\frac{1}{4}$ حاصل ہوتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔

6.6 استقاط (Elimination)

مندرجہ ذیل یک درجی ہمزاد مساواتوں پر غور کریں۔

$$x + 5 = 8 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$x - 1 = 1 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ مساوات (i) درست ہے $x = 3$ کے لیے اور مساوات (ii) $x = 2$ کے لیے درست ہے لیکن x کی ایک ہی قیمت کے لیے دونوں مساواتیں درست نہیں ہیں۔

اب یک درجی ہمزاد مساواتوں کا مشاہدہ کریں۔

$$x + a = 5 \quad \dots\dots\dots (iii)$$

$$x + b = 4 \quad \dots\dots\dots (iv)$$

$$a \frac{m^2}{\ell^2} + b \left(\frac{-m}{\ell} \right) + c = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{m^2}{\ell^2} - b \frac{m}{\ell} + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{am^2}{\ell^2} - \frac{bm}{\ell} + c = 0$$

$$\Rightarrow am^2 - b\ell m + c\ell^2 = 0 \quad (\ell^2 \text{ سے ضرب دینے سے})$$

$$am^2 - b\ell m + c\ell^2 = 0 \quad \text{یہ مطلوبہ نتیجہ ہے۔}$$

مشق 6.11

1- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقہ سے ساقط کریں۔

(i) $ax - b = 0$

(ii) $2x + 3y = 5$

$cx - d = 0$

$x - y = 2$

(iii) $x + a = b$

(iv) $a - b = 2x$

$x^2 + a^2 = b^2$

$a^2 + b^2 = 3x^2$

(v) $x - m = \ell$

$(\ell - m)x + a = 0$

2- مندرجہ ذیل مساواتوں سے v_i کو ساقط کریں۔

(i) $v_f = v_i + at$

(ii) $v_f = v_i + at$

(iii) $v_f = v_i - gt$

$S = v_i t + \frac{1}{2} at^2$

$2aS = v_f^2 - v_i^2$

$S = v_i t + \frac{1}{2} gt^2$

(b) دو مساواتوں میں سے ایک متغیر کو فارمولوں کے استعمال سے ساقط کرنا

مثال 1: مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو فارمولوں کے استعمال سے ساقط کریں۔

$$x + \frac{1}{x} = \ell; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2$$

حل:

$$x + \frac{1}{x} = \ell \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) کے طرفین کا مربع لینے سے

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (\ell)^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \ell^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \ell^2 - 2 \quad \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

مساوات (ii) اور (iii) کا موازنہ کرنے سے

$$\ell^2 - 2 = m^2 \quad \text{یہ مطلوبہ تعلق ہے۔}$$

مثال 2: مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کریں۔

$$x = \frac{2at}{1+t^2} ; \quad y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}$$

حل:

$$x = \frac{2at}{1+t^2} \quad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} \quad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{مساوات (i) سے}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \quad \text{طرفین کا مربع لینے سے}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} \quad \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{مساوات (ii) سے}$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{طرفین کا مربع لینے سے}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} \quad \dots\dots\dots \text{(iv)}$$

مساوات (iii) اور (iv) کو جمع کرنے سے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} + \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{پس یہ مطلوبہ حل ہے}$$

مشق 6.12

1- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو مناسب فارمولے کی مدد سے ساقط کریں۔

(i) $x - \frac{1}{x} = m ; x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2$

(ii) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{2} ; x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2$

(iii) $\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{\ell^2}{x^2} = b^2 ; \frac{\ell}{x} - \frac{x}{\ell} = a$

(iv) $\frac{x}{c} + \frac{c}{x} = 2a ; \frac{x}{c} - \frac{c}{x} = 3b$

(v) $x - \frac{1}{x} = \ell ; x^3 - \frac{1}{x^3} = m^3$

(vi) $x - \frac{1}{x} = p ; x^2 + \frac{1}{x^2} = 2q^2$

(vii) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3m^2 ; x^4 + \frac{1}{x^4} = n^4$

(viii) $x - \frac{1}{x} = a ; x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4$

2- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کریں۔

(i) $at^2 = x$
 $bt^3 = y$

(ii) $x - y = 2t$
 $x^2 + y^2 = 3t^2$

جائزہ مشق 6

1- ہر بیان کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) 99 کے مربع کو فارمولے کی مدد سے کیسے معلوم کریں گے؟

(a) $(100)^2 - 2(100)(1) + (1)^2$

(b) $(100)^2 + 2(100)(1) + (1)^2$

(c) $(100)^2 + 2(100)(1) - (1)^2$

(d) $(100)^2 - 2(100)(1) - (1)^2$

(ii) اگر $x + \frac{1}{x} = 9$ ہو تو $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 81

(b) 18

(c) 27

(d) 79

(iii) $5y(y-3) + 4(y-3)$ کی تجزی کیا ہوگی؟

(a) $(5y+y)(4-3)$

(b) $(5y-3)(y-r)$

(c) $(5y+4)(y-3)$

(d) $(y+3)(5y+4)$

(iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ کی تجزی کیا ہوگی؟

(a) $(2x+3y)(2x-3y)$

(b) $(2x-3y)(2x-3y)$

(c) $(2x+3y)(2x+3y)$

(d) $(2x-3y)(2x+3y)$

(v) اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ ہو تو $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 27 (b) 18 (c) 30 (d) 36

(vi) اگر $x - y = 2$ اور $x + y = 6$ ہو تو y کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 4 (b) 2 (c) 6 (d) 8

(vii) $ax^2 = b$ اور $cx^2 = d$ میں سے x کو ساقط کریں تو کیا حاصل ہوگا؟

(a) $bc = ad$ (b) $bd = ac$ (c) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (d) $abc = d$

(viii) $x + \frac{1}{x} = b$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2$ میں سے x کو ساقط کرنے سے کیا حاصل ہوگا؟

(a) $a^2 = b^2 + 2$ (b) $a^2 + b^2 = 2$

(c) $a^2 - b^2 = -2$ (d) $a^2 + b^2 = -2$

2- نیچے دیے ہوئے سوالات کے جواب دیں۔

(i) ہمزاد یک درجی مساواتیں کیا ہوتی ہیں؟

(ii) ہمزاد یک درجی مساواتیں حل کرنے کے کون کون سے طریقے ہیں؟

(iii) ایک متغیر کو ساقط کرنے کے لیے کتنی مساواتیں چاہئیں؟

3- اگر $x + \frac{1}{x} = 7$ ہو تو $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں۔

4- مندرجہ ذیل کی اجزائے ضربی معلوم کریں۔

i. $3xy + 6x^2y^2 + 9xz$ ii. $y^4 - 12y^2 + 36$ iii. $x^8 - y^8$

5- مندرجہ ذیل فارمولوں کے ذریعے مکعب معلوم کریں۔

i. 13 ii. $2x - 3y$ iii. $7a - b$

6- اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

7- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقہ سے ساقط کریں۔

i. $ax - b = 0$ $cx^2 + mx = 0$ ii. $lx - n = 0$, $sx^2 + tx + u = 0$

8- مندرجہ ذیل مساواتوں میں فارمولا کے استعمال سے x ساقط کریں۔

i. $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{3}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2$ ii. $x + \frac{1}{x} = 3b$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3$

iii. $x - \frac{1}{x} = a$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = b^4$

9- اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کا اضافہ کیا جائے تو $\frac{3}{4}$ کسر حاصل ہوتی ہے۔ اور اگر اسی کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ میں سے 1 کم کیا جائے تو کسر $\frac{2}{3}$ بن جاتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔

10- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کریں۔

(i) $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{2at}{1-t^2}$

(ii) $x = \frac{1+t^2}{2at}$, $y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}$

خلاصہ

تین بنیادی الجبری فارمولے:

i. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 ii. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 iii. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

• دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کی حاصل ضرب جن کے مزید اجزاء نہ ہو سکیں کے اظہار کو تجزی کہتے ہیں۔

i. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 ii. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

• مکعب کے فارمولے

• اگر a اور b حقیقی اعداد ہوں اور دونوں صفر نہ ہوں تو $ax + by = r$ کو دو متغیرات x, y میں ایک ایک درجی مساوات کہتے ہیں اور a, b, c عددی سر اور مساوات کی مستقل مقدار ہے۔

• ہمزاد ایک درجی مساواتوں سے مراد ایک سے زیادہ ایک درجی مساواتیں جن کے لیے ایک قیمت موزوں ہو۔

• دو متغیرات میں ہمزاد ایک درجی مساواتوں کی عام صورت

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$



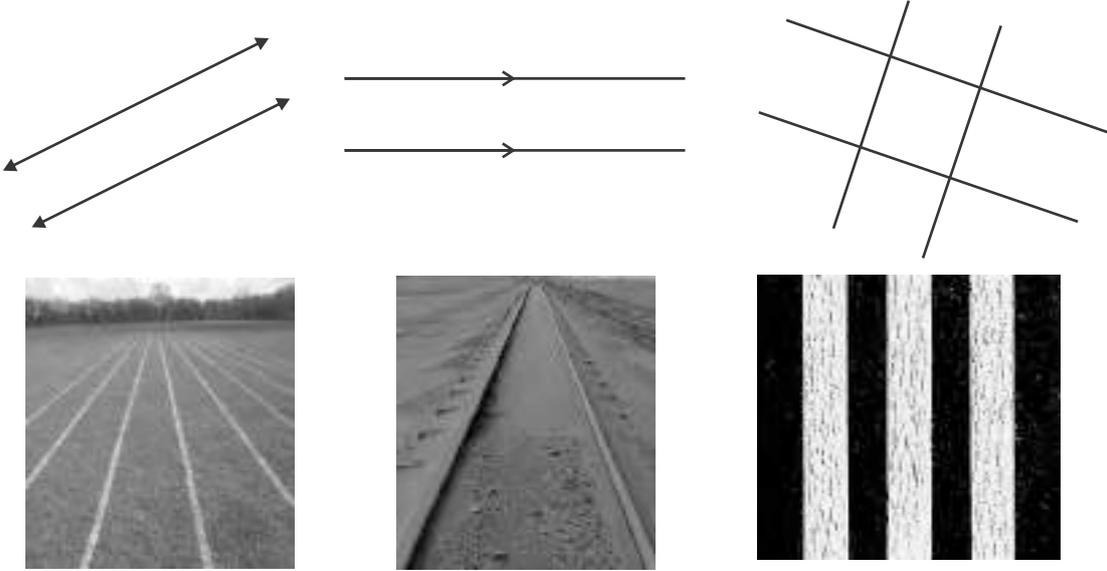
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- متوازی خطوط کی تعریف کر سکیں۔
- متوازی خطوط کی درج ذیل خصوصیات کی اشکال کی مدد سے وضاحت کر سکیں۔
- دو خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوں گے۔
- اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط قاطع اس طرح قطع کریں کہ ایک خط قاطع پر کے دو قطعاً متماثل ہوں گے۔
- اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط دوسرے ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔
- متوازی خطوط کا ایک خط قاطع کھینچنا اور متناظرہ زاویوں، متبادل اندرونی زاویوں، راسی متقابلہ زاویوں اور خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کی وضاحت کر سکیں۔
- جب ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو زاویوں کے جوڑوں کے درمیان درج ذیل روابط کی وضاحت کر سکیں۔
- متناظرہ زاویوں کے جوڑے متماثل ہوتے ہیں۔
- متبادل اندرونی زاویوں کے جوڑے متماثل ہوتے ہیں۔
- خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کے جوڑے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔ اشکال کی مدد سے وضاحت کر سکیں۔
- کثیر الاضلاع کی تعریف کر سکیں۔
- متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات کی وضاحت کر سکیں۔
- متوازی الاضلاع کے متقابلہ اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

7.1 متوازی خطوط (Parallel Lines)

7.1.1 تعریف:

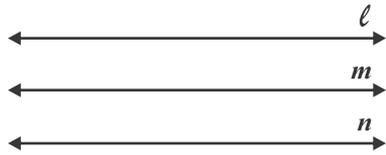
اگر دو خطوط جو ایک ہی مستوی پر واقع ہوں ایک دوسرے کو کسی بھی جگہ پر ملتے نہیں اور نہ ہی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو ان کو متوازی خطوط کہتے ہیں متوازی خطوط کا درمیانی فاصلہ ہمیشہ ایک ہی رہتا ہے۔ متوازی خطوط کی چند مثالیں نیچے دی گئی ہیں۔



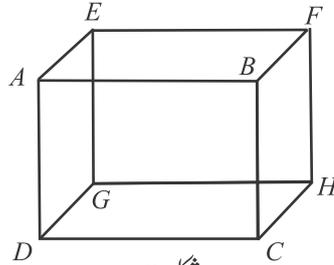
7.1.2 متوازی خطوط کی خصوصیات کی وضاحت

- دو خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوں گے
- فرض کریں دو خطوط l اور n ایک تیسرے خط m کے متوازی ہیں۔ جیسا کہ شکل 1 میں دکھایا گیا ہے۔
- خط l اور خط m کا نقطہ تقاطع کوئی نہیں اور نہ ہی خط n اور m کا کوئی نقطہ تقاطع ہے۔ خط l پر کے تمام نقاط خط m سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔ اسی طرح خط n کے تمام نقاط خط m سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔ اسی طرح خط l اور m کا بھی کوئی مشترک نقطہ نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ خط l خط n کے متوازی ہے۔

شکل 2 میں متوازی قطعات کے جوڑے $AB \parallel CD$ ، $AB \parallel EF$ ، $GH \parallel EF$ وغیرہ ہیں۔ اسی طرح $CD \parallel EF$ یا $GH \parallel AB$ ہیں۔

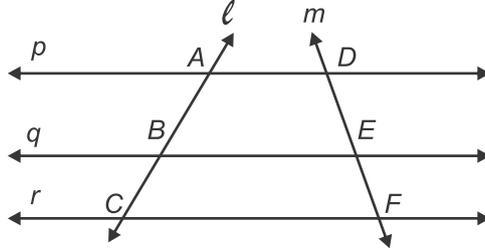


شکل 1



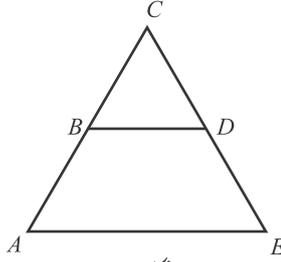
شکل 2

- اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط قاطع اس طرح قطع کریں کہ ایک خط قاطع پر کے دو قطعات بھی آپس میں متماثل ہوں تو دوسرے خط قاطع پر کے دو قطعات بھی آپس میں متماثل ہوں گے۔



شکل 3

- اوپر دی گئی شکل میں دو خطوط قاطع l اور m تین باہم متوازی خطوط p ، q اور r کو نقاط A ، B ، C ، D ، E اور F پر قطع کرتے ہیں۔ خط قاطع l پر قطعات \overline{AB} اور \overline{BC} آپس میں متماثل ہیں۔ اور خط قاطع m پر قطعات \overline{DE} اور \overline{EF} ہیں۔ متوازی خطوط کی اوپر دی گئی خاصیت سے اگر $m\overline{BC} = m\overline{AB}$ تو $m\overline{DE} = m\overline{EF}$ ہے۔
- اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط دوسرے ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔ (اوپر دی گئی خصوصیت کا اطلاق)



شکل 4

- شکل 4 میں \overline{AC} کا وسطی نقطہ B اور \overline{AE} $\parallel \overline{BD}$ یوں اوپر دی گئی خاصیت سے \overline{CE} کا وسطی نقطہ D ہے۔

$$\overline{BD} \parallel \overline{AE} \text{ اور } m\overline{AB} = m\overline{BC} \quad \text{یعنی}$$

$$\Rightarrow m\overline{CD} = m\overline{DE}$$

- 7.1.3 دو متوازی خطوط کو ایک خط قاطع سے بننے والے مخصوص زاویے دو متوازی خطوط کو ایک خط قاطع سے بننے والے زاویے درج ذیل ہیں۔

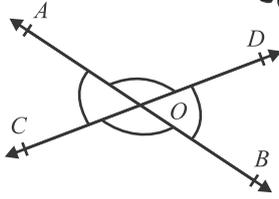
(i) راسی متقابلہ زاویے

(ii) متناظرہ زاویے

(iii) متبادلہ اندرونی زاویے

(iv) اندرونی زاویے

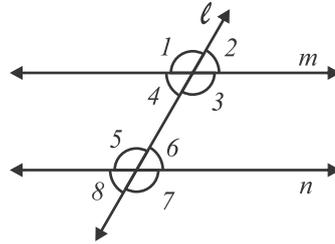
راستی متقابلہ زاویے اسی وقت بنتے ہیں جب دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ راستی متقابلہ زاویے نقطہ تقاطع پر بننے والے ایسے زاویے ہوتے ہیں جو ایک دوسرے کے مقابل ہوتے ہیں اور یہ متصلہ زاویے نہیں ہوتے ہیں۔



$\angle AOC$ اور $\angle DOB$ راستی متقابلہ زاویے ہیں اور $\angle AOD$ اور $\angle COB$ بھی راستی متقابلہ زاویے ہیں۔

متناظرہ زاویے

درج ذیل شکل میں دو متوازی خطوط m اور n ہیں اور خط قاطع ℓ ہے۔ اب زاویوں کے ان جوڑوں پر غور کیجیے۔

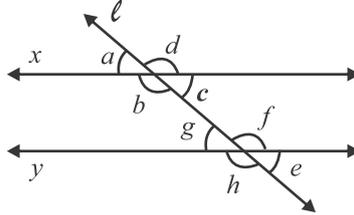


$\angle 1$ اور $\angle 5$
 $\angle 2$ اور $\angle 6$
 $\angle 3$ اور $\angle 7$
 $\angle 4$ اور $\angle 8$

زاویوں کے یہ جوڑے متناظرہ زاویے کہلاتے ہیں۔ اس لیے کہ زاویوں کے ان جوڑوں میں سے ہر جوڑا خط قاطع کے ایک ہی طرف واقع ہے اور دونوں متوازی خطوط کے بھی ایک ہی طرف واقع ہے۔

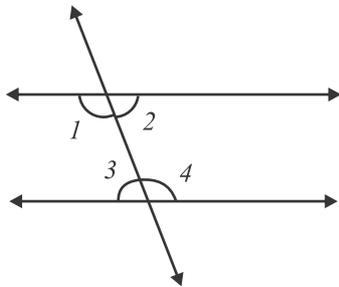
متبادلہ اندرونی زاویے

درج ذیل شکل پر غور کیجیے جس میں خط قاطع ℓ دو متوازی خطوط x اور y کو قطع کرتا ہے۔



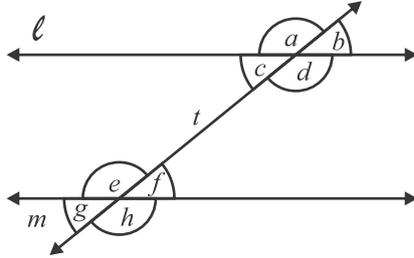
زاویوں کے جوڑے $\angle b$ ، $\angle f$ اور $\angle c$ ، $\angle g$ میں $\angle b$ اور $\angle f$ اور اسی طرح $\angle c$ اور $\angle g$ میں سے ہر ایک زاویہ خط قاطع کے دوسری طرف ہے اور متوازی خطوط کے درمیان ہے۔ زاویوں کے ایسے جوڑے کو متبادلہ اندرونی زاویے کہتے ہیں۔

اندرونی زاویے



شکل میں دیے گئے زاویوں کے جوڑوں $\angle 1$ ، $\angle 3$ اور $\angle 2$ ، $\angle 4$ پر غور کیجیے۔ ہر جوڑے میں شامل زاویہ خط قاطع کے ایک ہی طرف واقع ہے اور متوازی خطوط کے اندر واقع ہے۔ زاویوں کے ایسے جوڑوں کو اندرونی زاویے کہتے ہیں۔

مثال 1: اگر دو متوازی خطوط l اور m ہیں اور دونوں کا خط قاطع t ہے۔ تو اس طرح بننے والے مخصوص زاویوں کی نشاندہی کیجیے۔



حل:

- راسی متقابلہ زاویوں کے جوڑے a, b اور c, d اور e, f اور g, h ہیں۔
- متناظرہ زاویوں کے جوڑے جو خط قاطع کے ایک ہی طرف ہیں e, a اور g, c ہیں۔
- متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے c, f اور e, d ہیں۔
- اندرونی زاویوں کے جوڑے e, c اور f, d ہیں۔

7.1.4 زاویوں کے جوڑوں کے درمیان تعلق جب ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے

جب ایک خط قاطع متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو:

- متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- متبادلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں یعنی ان کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔
- درج ذیل شکل پر غور کیجیے جس میں $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ اور خط قاطع \overline{EF} ہے۔
- متناظرہ زاویوں کے جوڑے $\angle 1, \angle 5$ ؛ $\angle 3, \angle 7$ ؛ $\angle 2, \angle 6$ اور $\angle 4, \angle 8$ ہیں۔

جوڑے میں شامل ہر ایک زاویہ کی پیمائش دوسرے زاویے کی پیمائش کے برابر ہے۔ یعنی

$$m\angle 1 = m\angle 5, m\angle 2 = m\angle 6, m\angle 3 = m\angle 7, m\angle 4 = m\angle 8$$

- متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے $\angle 3, \angle 5$ اور $\angle 4, \angle 6$ ہیں۔

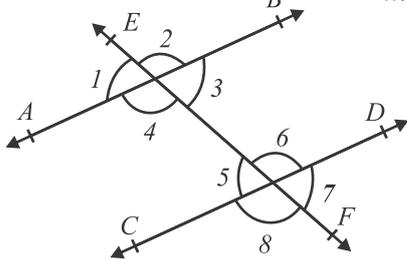
جوڑے میں شامل ہر زاویہ کی پیمائش دوسرے زاویہ کی پیمائش کے برابر ہے۔ یعنی

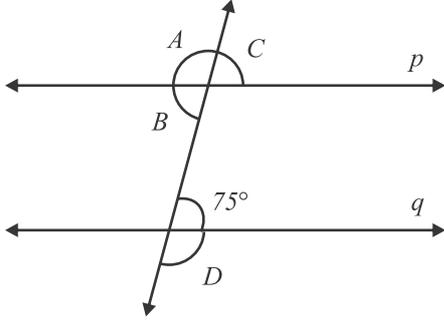
$$m\angle 3 = m\angle 5 \text{ اور } m\angle 4 = m\angle 6$$

- خط قاطع کے ایک ہی طرف کے اندرونی زاویوں کے جوڑے $\angle 3, \angle 6$ اور $\angle 4, \angle 5$

اور $\angle 4, \angle 5$ زاویوں کے یہ جوڑے سپلیمنٹری زاویے بھی ہیں۔ اور اس

$$\text{طرح } m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ \text{ اور } m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$$





مثال 2: سامنے دی گئی شکل میں $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ اور $\angle D$ کی مقداریں

معلوم کریں جبکہ p اور q متوازی خطوط ہیں۔

حل: $\angle B$ اور دیا ہوا زاویہ متبادلہ اندرونی زاویے ہیں۔

$$m\angle B = 75^\circ \quad \text{اس لیے}$$

$\angle C$ اور دیا ہوا زاویہ متناظرہ زاویے ہیں۔

$$m\angle C = 75^\circ \quad \text{اس لیے}$$

زاویہ $\angle A$ اور $\angle B$ متصلہ سپلیمنٹری زاویے ہیں۔

$$m\angle A + m\angle B = m\angle A + 75^\circ = 180^\circ \quad \text{اس لیے}$$

$$m\angle A = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$\angle D$ اور دیا ہوا زاویہ متصلہ سپلیمنٹری زاویے ہیں۔

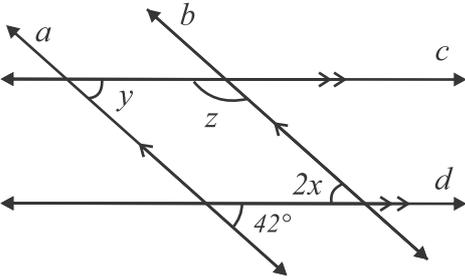
$$m\angle D + 75^\circ = 180^\circ \quad \text{اس لیے}$$

$$m\angle D = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

یوں $m\angle A = 105^\circ$ ، $m\angle B = 75^\circ$ ، $m\angle C = 75^\circ$ اور $m\angle D = 105^\circ$

مثال 3: دی ہوئی شکل میں x ، y اور z کی مقداریں معلوم کریں۔ جبکہ خطوط a ، b متوازی

خطوط ہیں۔ اور d ، c بھی آپس میں متوازی خطوط ہیں۔



حل: $a \parallel b$

اس لیے $m\angle 2x = 42^\circ$ (متبادلہ اندرونی زاویے)

$$\angle x = 21^\circ$$

$c \parallel d$

اس لیے $m\angle y = 42^\circ$ (متناظرہ زاویے)

(اندرونی زاویے) $m\angle y + m\angle z = 180^\circ$

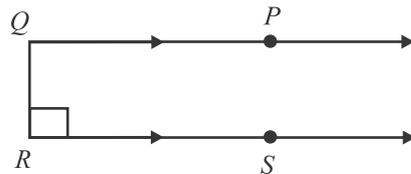
$$42^\circ + z = 180^\circ$$

$$m\angle z = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

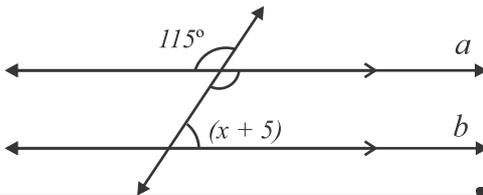
نوٹ: زاویوں اور اضلاع کی پیمائشیں لکھی گئی قیمتوں کے مطابق نہیں ہیں۔

مشق 7.1

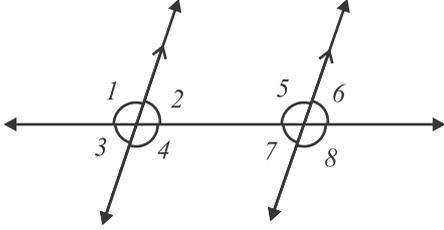
1- $\angle PQR$ کی قیمت معلوم کیجیے۔



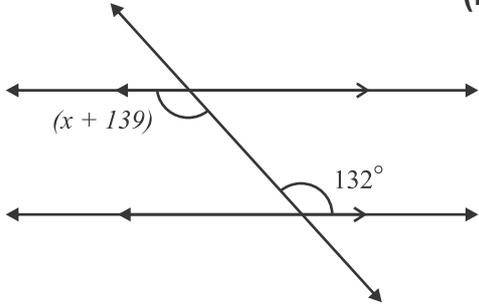
2- x کی قیمت معلوم کیجیے۔



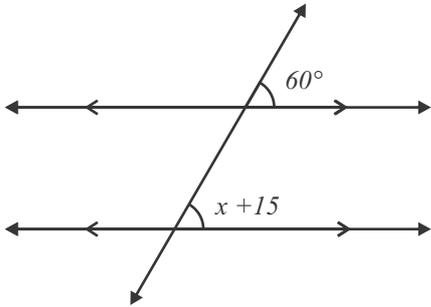
4- اگر $m\angle 1 = 105^\circ$ تو $m\angle 4$ ، $m\angle 5$ اور $m\angle 8$ معلوم کیجیے۔ حل میں استعمال کی گئی خاصیت بھی لکھیے۔



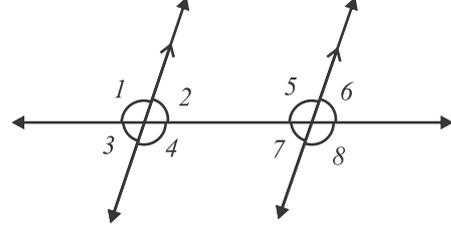
(ii)



(iv)

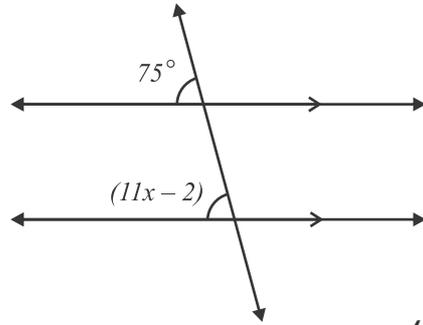


3- اگر $m\angle 3 = 68^\circ$ اور $m\angle 8 = 2x + 4$ تو x کی قیمت معلوم کیجیے۔ اقدامات کی وضاحت کیجیے۔

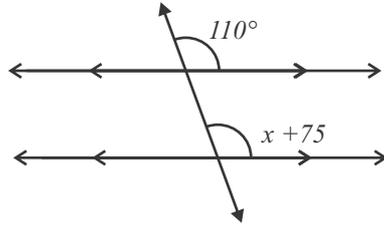


5- x کی قیمت معلوم کیجیے اور زاویہ کی مقدار بھی معلوم کیجیے۔

(i)



(iii)



7.2 کثیرالاضلاع اشکال (Polynomials)

7.2.1 کثیرالاضلاع کی تعریف

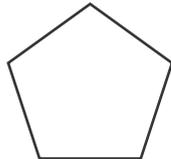
کثیرالاضلاع ایک سادہ بند مستوی شکل ہے۔ جس کے اضلاع تین یا تین سے زیادہ قطعات خط ہوتے ہیں۔ کثیرالاضلاع کا نام اُس کے اضلاع کی تعداد سے لیا جاتا ہے۔ چند کثیرالاضلاع اشکال ناموں کے ساتھ نیچے دی جاتی ہیں۔



مسیب 7-اضلاع



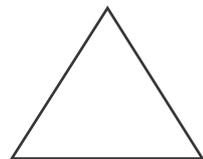
مسدس 6-اضلاع



مخمس 5-اضلاع



چوکور 4-اضلاع

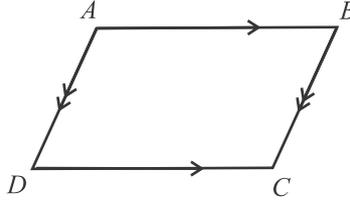


مثلث 3-اضلاع

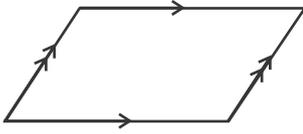
7.2.2 متوازی الاضلاع کی خصوصیات کی وضاحت

متوازی الاضلاع ایک ایسی چوکور ہے جس کے متقابلہ اضلاع کے جوڑے متوازی ہوتے ہیں مثلاً چوکور $ABCD$ ایک

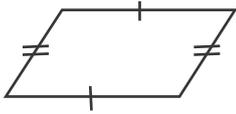
متوازی الاضلاع ہے کیوں کہ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ اور $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



ایک متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات ہیں۔



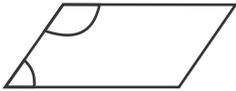
(i) متوازی الاضلاع ایسی چوکور ہے جس کے متقابلہ اضلاع کے جوڑے آپس میں متوازی ہوتے ہیں۔



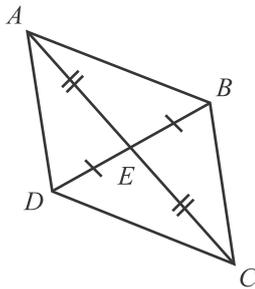
(ii) متوازی الاضلاع میں متقابلہ اضلاع کے جوڑے آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔



(iii) متوازی الاضلاع میں متقابلہ زاویوں کے جوڑے آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔



(iv) متوازی الاضلاع کی ترتیب میں لیے گئے دو زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔



(v) متوازی الاضلاع میں دو اندرونی متوازی زاویوں کا مجموعہ سپلیمنٹری ہوتا ہے۔

7.2.3 منظم مخمس، مسدس اور مخمس کی تعریف

ایک ایسی کثیر الاضلاع جس کے تمام اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں منظم کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔ منظم کثیر الاضلاع کے تمام زاویوں کی مقداروں کی پیمائش یکساں ہوتی ہے۔

• منظم خمس (Regular Pentagon)

ایک ایسی پانچ ضلعی کثیر الاضلاع جس کے تمام اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں اور اندرونی زاویوں کی مقداروں کی پیمائشیں ایک ہی ہوں منظم خمس کہلاتی ہے۔ منظم خمس کے تمام اندرونی زاویوں کی مقداروں کی پیمائشوں کا مجموعہ 540° ہوتا ہے۔ ہر ایک اندرونی زاویہ کی مقدار کی پیمائش $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ ہوتی ہے۔

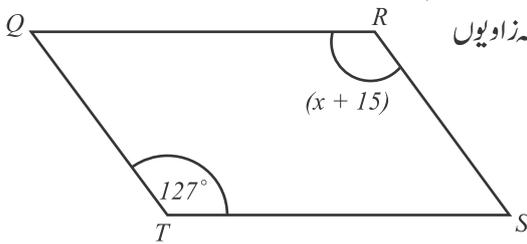
• منظم مسدس (Regular Hexagon) اندرونی

ایک ایسی چھ ضلعی کثیر الاضلاع جس کے تمام اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں اور اندرونی زاویوں کی مقداروں کی پیمائشیں ایک ہی ہوں منظم مسدس کہلاتی ہے۔ منظم مسدس کے تمام اندرونی زاویوں کی مقداروں کی پیمائش کا مجموعہ 720° ہوتا ہے۔ ہر ایک اندرونی زاویہ کی مقدار کی پیمائش $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$ ہوتی ہے۔

• منظم مٹمن (Regular Octagon)

ایک ایسی آٹھ ضلعی کثیر الاضلاع جس کے تمام اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں اور اندرونی زاویوں کی مقداروں کی پیمائشیں ایک ہی ہوں منظم مٹمن کہلاتی ہے۔ منظم مٹمن کے تمام اندرونی زاویوں کی مقداروں کی پیمائش کا مجموعہ 1080° ہوتا ہے۔ ہر ایک اندرونی زاویہ کی مقدار کی پیمائش $\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$ ہوتی ہے۔

مثال 1: $QRST$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ دی ہوئی شکل میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔



حل: $QRST$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ اس لیے اس کے متقابلہ زاویوں کی مقدار برابر ہوگی۔

$$m\angle(x + 15)^\circ = 127^\circ$$

$$x + 15 = 127^\circ$$

$$m\angle x = 127 - 15 = 112^\circ$$

مثال 2: $DEFG$ ایک دی ہوئی متوازی الاضلاع ہے۔ x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: $DEFG$ متوازی الاضلاع ہے۔

$$m\angle G = 70^\circ + 45^\circ = 115^\circ$$

$$m\angle G + m\angle D = 180^\circ \quad (\text{متوازی الاضلاع کے دو ساتھ والے زاویے})$$

$$115^\circ + m\angle(5y)^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle D = 180^\circ - 115^\circ$$

$$m\angle D = 65^\circ$$

یعنی (i)

$$y = \frac{65}{5} = 13$$

$$m\angle F = m\angle D$$

اب

$$m\angle F = m\angle D \quad (\text{متوازی الاضلاع کی متقابلہ زاویے})$$

$$m\angle(7x - 5)^\circ = 65^\circ \quad \text{سے (i)}$$

$$7x - 5 = 65$$

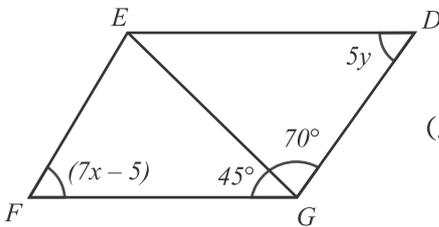
$$7x = 70$$

$$x = 10$$

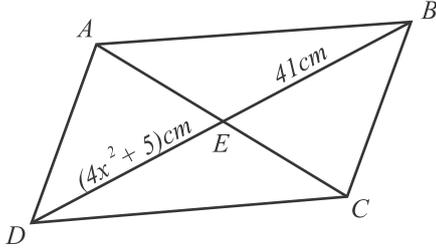
$$y = 13, \quad x = 10$$

پس

یوں



مثال 3: $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ x کی قیمت معلوم کیجیے۔
حل: متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



$$m \overline{DE} = m \overline{BE}$$

$$4x^2 + 5cm = 41cm$$

$$4x^2 = 41 - 5$$

$$4x^2 = 36$$

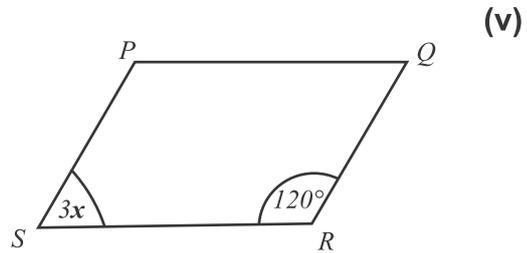
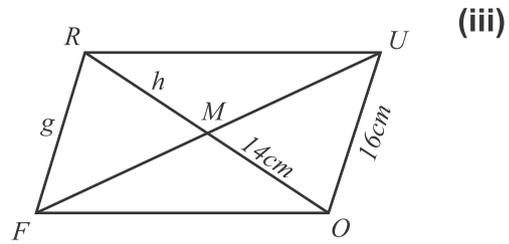
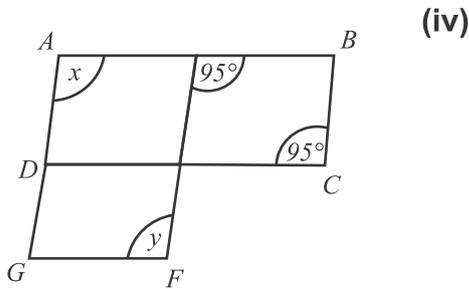
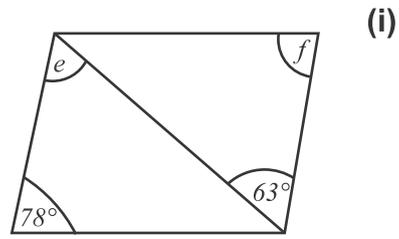
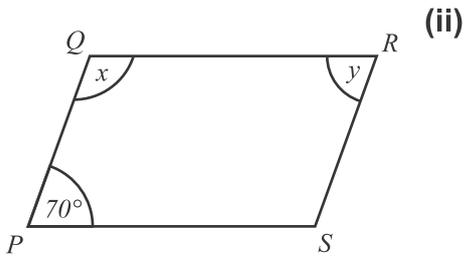
$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

یوں
شکل سے
پس

مشق 7.2

1- درج ذیل متوازی الاضلاع میں نامعلوم کی قیمت معلوم کیجیے۔

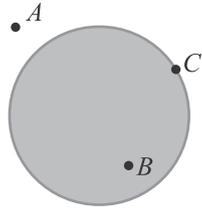
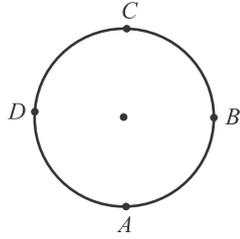


7.3 دائرہ (Circle)

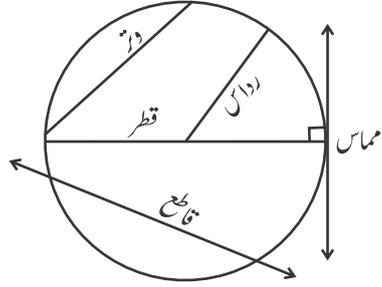
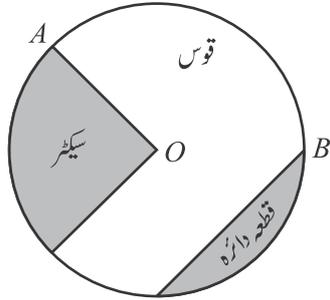
دائرہ جیومیٹری کی ایک سادہ بند مستوی یا مستوی پر سادہ بند منحنی شکل ہے کہ اس پر کے تمام نقاط ایک معین نقطہ سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔

7.3.1 دائرہ کے اندرون اور بیرون میں واقع نقطہ کی وضاحت

دائرہ مستوی کو دو علاقوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ایک علاقہ کو دائرہ کا اندرون اور دوسرے کو دائرہ کا بیرون کہتے ہیں۔ روزمرہ زندگی میں ہم دائرہ شکل کی حد منحنی لکیر کو کہتے ہیں۔ یا اس شکل کو کہتے ہیں جس میں اس کا اندرون بھی شامل ہوتا ہے۔ دراصل پہلی صورت ہی دائرہ کی صحیح تعریف ہے اور دوسری صورت تو دائرہ کی ڈسک (disk) ہے۔ نقطہ A دائرہ کے بیرون میں ہے۔ اور نقطہ B دائرہ کے اندرون میں ہے جبکہ نقطہ C دائرہ کا ایک نقطہ ہے۔



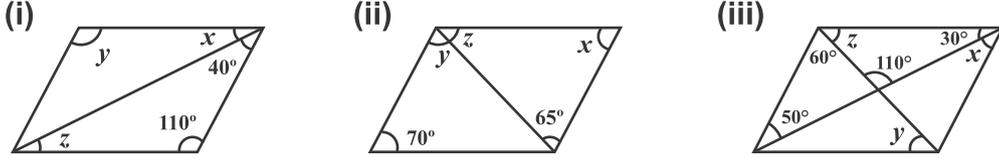
7.3.2 دائرہ سے متعلقہ اصلاحات کا بیان



- قوس (Arc): دائرہ کے کچھ مسلسل حصہ کو دائرہ کی قوس کہتے ہیں۔ قوس AB کو \widehat{AB} سے ظاہر کرتے ہیں۔
- وتر (Chord): یہ ایک قطعہ خط ہے جس کے سرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔
- قاطع (Sector): یہ ایک خطہ مستقیم ہے جو دائرہ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔ وتر کو دونوں طرف بڑھانے سے قاطع بنتا ہے۔
- قطعہ دائرہ (Segment): دائرہ کا وہ خطہ (علاقہ) جو اس کی قوس اور متعلقہ وتر نے گھیرا ہو۔ قطعہ دائرہ کہلاتا ہے۔
- مماس (Tangent): ایسا خط مستقیم جو دائرہ کو صرف ایک بیرونی نقطہ پر چھو کر گزرتا ہو۔ دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔
- ہم دائرہ نقاط (Concyclic Points): ایسے تمام نقاط ہم دائرہ کہلاتے ہیں جو ایک ہی دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔ مثلاً A, B, C اور D ہم دائرہ نقاط ہیں۔

مشق 7.3

1- درج ذیل متوازی الاضلاع میں نامعلوم x, y, z اور y, z زاویوں کی مقداروں کو معلوم کریں۔



2- ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ سے 28° بڑا ہے۔ اس کے زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے۔

3- اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ دوسرے زاویہ سے چارگنا بڑا ہو تو اُس کے زاویے معلوم کیجیے۔

4- متوازی الاضلاع کے ایک زاویہ کی مقدار 85° ہے۔ اُس کے دوسرے زاویے معلوم کیجیے۔

5- متوازی الاضلاع WXYZ میں $m\angle X = (4a - 40)$ اور $m\angle Z = (2a - 8)$ ۔ زاویہ W کی مقدار معلوم کریں۔

جائزہ مشق 7

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے کردائرہ لگائیں۔

(i) اگر دو ہم مستوی خطوط ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو انہیں کیا کہتے ہیں؟

- (a) متوازی خطوط (b) عمودی خطوط
(c) قاطع خطوط (d) تمام (a)، (b)، (c)
- (ii) متوازی خطوط کی کیا خوبی ہے؟

- (a) یکساں فاصلہ پر رہتے ہیں (b) ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں
(c) ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں (d) یکساں فاصلے پر نہیں رہتے

(iii) اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط قاطع اس طرح قطع کریں کہ ایک خط قاطع پر کے دو قطعے آپس میں متماثل ہوں تو دوسرے خط قاطع پر کے دو قطعے کیسے ہوں گے؟

- (a) میں سے ایک دوسرے سے بڑا ہوتا ہے (b) مساوی نہیں ہوں گے
(c) میں پہلے سے دوسرا چھوٹا ہوتا ہے (d) مساوی ہوں گے
- (iv) راسی متقابلہ زاویے کیسے ہوتے ہیں؟

- (a) متماثل (b) سپلیمنٹری
(c) کمپلیمنٹری (d) برابر
- (v) مبادلہ اندرونی زاویے کیسے ہوتے ہیں؟

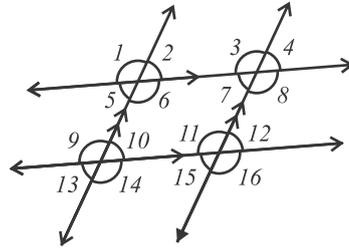
- (a) متماثل (b) سپلیمنٹری
(c) کمپلیمنٹری (d) برابر

(vi) تین یا تین سے زیادہ اضلاع والی سادہ بند مستوی شکل کو کیا کہتے ہیں؟

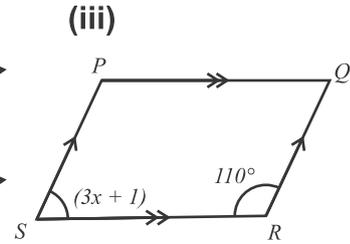
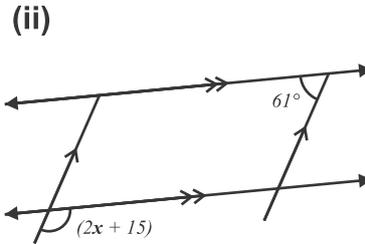
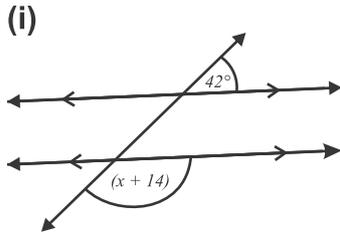
- (a) کثیر الاضلاع (b) دائرہ
(c) مخروط (d) مخروطی مینار

- (vii) ایک مخصوص قسم کی چوکور جس کے متقابلہ اضلاع کے جوڑے متوازی ہوں کا نام کیا ہے؟
- (a) مثلث (b) منظم کثیرالاضلاع (c) متوازی الاضلاع (d) پتنگ
- (viii) دائرہ کا کچھ مسلسل حصہ کیا کہلاتا ہے؟
- (a) وتر (b) قاطع (c) سیکڑ (d) قوس
- (ix) قطعہ خط جس کے سرے دائرہ پر واقع ہوں کیا کہلاتا ہے؟
- (a) وتر (b) قاطع (c) سیکڑ (d) قوس
- (x) خطِ مستقیم جو دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرے کیا کہلاتا ہے؟
- (a) وتر (b) قاطع (c) سیکڑ (d) قوس
- (xi) دائرہ کا حصہ جو دو رداسوں اور ان کے درمیانی قوس میں گھرا ہو کیا کہلاتا ہے؟
- (a) وتر (b) قاطع (c) سیکڑ (d) قوس
- (xii) ایک خطِ مستقیم جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر چھو کر گزرتا ہے اُسے دائرہ کا کیا کہتے ہیں؟
- (a) وتر (b) قاطع (c) سیکڑ (d) مماس
- (xiii) دائرہ کا وہ خطہ (علاقہ) جو اس کی قوس اور متعلقہ وتر نے گھیرا ہو کیا کہلاتا ہے؟
- (a) وتر (b) قاطع (c) سیکڑ (d) قطعہ

2- نیچے دی گئی شکل پر غور کیجیے۔



- (a) جوڑوں کے نام لکھیے
- (i) متناظرہ زاویے (ii) متبادلہ اندرونی زاویے (iii) راسی متقابلہ زاویے (iv) متبادلہ زاویے
- (b) اگر $m\angle 1 = 125^\circ$ تو باقی تمام زاویوں کو معلوم کیجیے۔
- 3- x کی قیمت معلوم کیجیے۔



خلاصہ

- مستوی پر دو خطوط جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرے متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔ متوازی خطوط ایک دوسرے سے یکساں فاصلہ پر رہتے ہیں۔
- دو خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔
- اگر تین خطوط کو دو خطوط قاطع اس طرح قطع کریں کہ ایک خط قاطع پر کے دو قطعاً آپس میں متماثل ہوں تو دوسرے خط قاطع پر کے دو قطعاً بھی آپس میں متماثل ہوں گے۔
- اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے ایک خط دوسرے ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ تیسرے ضلع کی تہیہ کرے گا۔
- جب ایک خط قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو:
 - متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
 - راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
 - متبادلہ اندرونی زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
 - اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔
- کثیر الاضلاع ایک سادہ بند مستوی شکل ہے۔ جس کے اضلاع تین یا تین سے زیادہ قطعاً خط ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع ایک مخصوص قسم کی چوکور ہے جس کے متقابلہ ضلعوں کے جوڑے متوازی ہوتے ہیں۔
- ایک منظم کثیر الاضلاع کے تمام اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوتی ہے اور تمام زاویوں کی مقداروں کی پیمائش برابر ہوتی ہیں۔
- دائرہ جیومیٹری کی سادہ بند شکل ہے کہ اس پر کے تمام نقاط ایک معین نقطہ (مرکز) سے مساوی فاصلہ (رداس) پر رہتے ہیں۔
- دائرہ کا وتر ایک ایسا قطعہ خط جس کے سرے دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔
- قاطع ایک ایسا خط مستقیم ہے جو دائرہ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔ وتر کو دونوں طرف بڑھانے سے قاطع بنتا ہے۔
- دائرہ کا وہ علاقہ جو اس کے دور داسوں اور ان کے درمیانی قوس نے گھیرا ہوتا ہے۔ دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔
- دو یا دو سے زیادہ ایسے دائرے جن کا مرکز ایک ہی ہو لیکن رداسوں کی لمبائیاں مختلف ہوں ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔
- ایسے تمام نقاط ہم دائرہ کہلاتے ہیں جو ایک ہی دائرہ پر واقع ہوں۔
- ایسا خط مستقیم جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر چھو کر گزرتا ہو۔ دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔



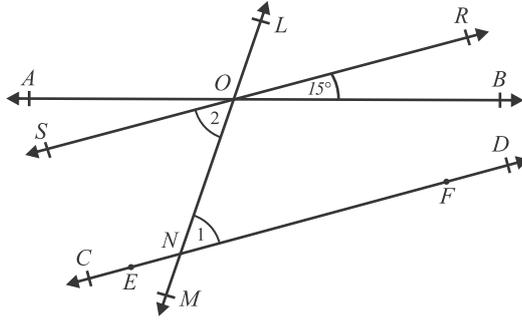
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- دو غیر متوازی خطوط کی تعریف کر سکیں، انھیں ظاہر کر سکیں اور بغیر بڑھائے ان کا زاویہ میلان معلوم کر سکیں۔
- دو غیر متوازی خطوط کو بڑھائے بغیر ان کے زاویہ میلان کی تصنیف کر سکیں۔
- مربع بنا سکیں:
 - جب مربع کے ضلع کی لمبائی دی گئی ہو۔
 - جب مربع کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا فرق دیا گیا ہو۔
 - جب مربع کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا مجموعہ دیا گیا ہو۔
- مستطیل بنا سکیں:
 - جب دو اضلاع کی لمبائیاں دی گئی ہوں۔
 - جب ایک ضلع اور وتر کی لمبائی دی گئی ہو۔
- معین بنا سکیں:
 - جب ایک ضلع کی لمبائی اور قاعدہ پر کے دو زاویے دیے گئے ہوں۔
 - جب ایک ضلع اور وتر کی لمبائی دی گئی ہو۔
- متوازی الاضلاع بنا سکیں:
 - جب دونوں وتروں کی لمبائیاں اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو۔
 - جب دو متضاد اضلاع کی لمبائیاں اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو۔
- پینک بنا سکیں:
 - جب دو نا برابر اضلاع اور ایک وتر کی لمبائیاں دی گئی ہوں۔
- منظم خمس بنا سکیں:
 - جب ضلع کی لمبائی دی گئی ہو۔
- قائمہ الزاویہ مثلث بنا سکیں:
 - جب وتر اور ایک ضلع کی لمبائی دی گئی ہو۔
 - جب وتر کی لمبائی اور وتر کے متقابلہ نقطہ راس کا فاصلہ دیا گیا ہو۔

8.1 دو غیر متوازی خطوط کی تعریف کرنا اور انہیں بڑھائے بغیر ان کا درمیانی زاویہ معلوم کرنا

8.1.1 تعریف

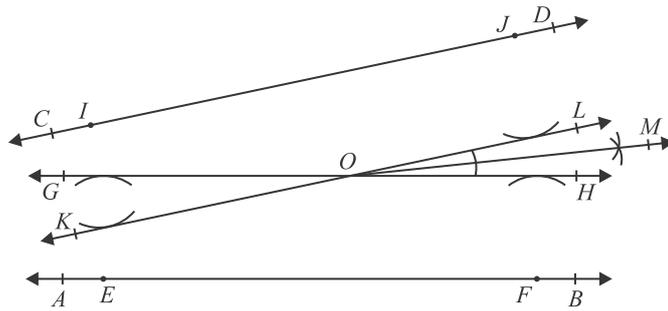
خطوط جو ایک نقطہ پر ملتے ہیں کو غیر متوازی خطوط کہتے ہیں۔ نیچے دی گئی شکل میں \vec{AB} اور \vec{CD} دو غیر متوازی خطوط ہیں۔ \vec{LM} خط قاطع ہے۔ \vec{AB} اور \vec{CD} کا زاویہ میلان معلوم کریں۔



مدارج عمل:

- i. \vec{LM} دیے ہوئے دو غیر متوازی خطوط \vec{AB} اور \vec{CD} کا خط قاطع لیا جو \vec{AB} کو نقطہ O پر اور \vec{CD} کو نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔
- ii. پیمانے اور پرکار کی مدد سے $m\angle 2 = m\angle 1$ بنائے جس سے \vec{CD} ، \vec{SOR} کے متوازی حاصل ہوا۔
- iii. چونکہ \vec{CD} اور \vec{SR} ایک دوسرے کے متوازی ہیں اس لیے $m\angle BOR$ مطلوبہ زاویہ ہے۔
- iv. پس غیر متوازی خطوط کے درمیان زاویہ کی مقدار 15° ہے جس کی پیمائش پروٹریکٹر سے کی گئی ہے۔

8.1.2 دو غیر متوازی خطوط کو بڑھائے بغیر ان کے زاویہ میلان کی تنصیف کرنا



\vec{AB} اور \vec{CD} دو غیر متوازی خطوط ہیں اور ہمیں \vec{AB} اور \vec{CD} کے زاویہ میلان کی تنصیف کرنا ہے۔

مدارج عمل:

- i. \vec{AB} اور \vec{CD} دو غیر متوازی خطوط کھینچئے۔
- ii. \vec{AB} پر نقاط E اور F کو مرکز مان کر پرکار کی مدد سے یکساں رداس کی دو قوسیں لگائیں اور ان قوسوں کو مس کرتا ہوا \vec{GH} کھینچا۔
- iii. اسی طرح \vec{CD} پر نقاط I اور J کو مرکز مان کر \vec{CD} کے نیچے پرکار کی مدد سے یکساں رداس کی دو قوسیں لگائیں اور ان قوسوں کو مس کرتا ہوا \vec{KL} کھینچا۔
- iv. اسی طرح دو غیر متوازی خطوط کے درمیان $\angle HOL$ حاصل ہوا۔
- v. $\angle HOL$ کی تصریف کرتی ہوئی \vec{OM} کھینچی جو کہ دیے ہوئے غیر متوازی خطوط کی مطلوبہ تصریف ہے۔

8.1.3 مربع کی بناوٹ

(a) جب وتر دیا گیا ہو

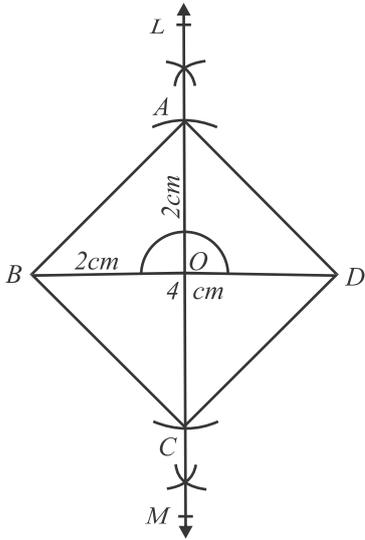
مثال 1: ایک مربع ABCD بنایے جبکہ اُس کے وتر کی لمبائی 4cm ہے۔

حل:

مربع ABCD کے وتروں میں سے ایک وتر \vec{BD} ہے اور $m\vec{BD} = 4cm$ ۔

نوٹ: مربع میں دونوں وتروں کی لمبائی برابر ہوتی ہے۔

مدارج عمل:



i. وتر $m\vec{BD} = 4cm$ کھینچا۔

ii. \vec{BD} کا عمودی ناصف \vec{LM} لیا جو \vec{BD} کو نقطہ O پر قطع کرتا

ہے۔

iii. نقطہ O کو مرکز مان کر $m\vec{OB} = 2cm$ رداس کے

برابر دو قوسیں لگائیں جو \vec{LM} کو نقاط A اور C پر قطع کرتی

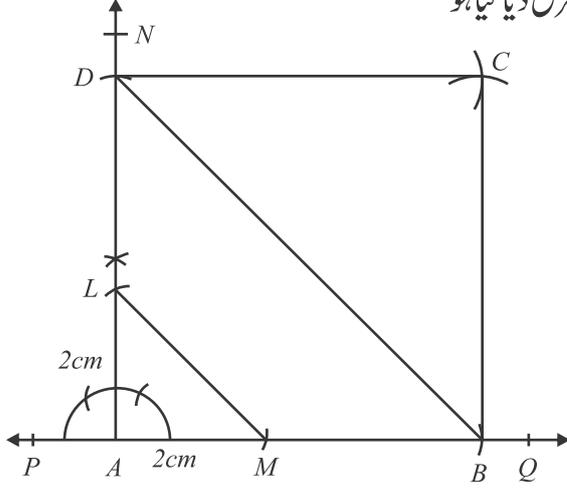
ہیں۔

iv. نقطہ A کو نقاط B، D سے ملائیں اور نقطہ C کو نقاط B، D

سے ملائیں۔

نتیجہ: ABCD مطلوبہ مربع ہے۔

(b) مربع بنانا جب اُس کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا فرق دیا گیا ہو



مثال 2: ایک مربع ABCD بنایے جبکہ اُس کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا فرق 2 cm ہے۔

حل:

مدارج عمل:

- i. خط \overrightarrow{PQ} پر ایک نقطہ A لیں۔
- ii. نقطہ A پر $\angle QAN = 90^\circ$ بنایا۔
- iii. نقطہ A کو مرکز مان کر 2 cm رداس کی دو قوسیں لگائیں جو \overrightarrow{AN} کو نقطہ L پر اور \overrightarrow{AQ} کو نقطہ M پر قطع کریں۔
- iv. نقطہ M کو مرکز مان کر $m\overline{LM}$ رداس کی قوس لگائیں جو \overrightarrow{AQ} کو نقطہ B پر قطع کرے۔
- v. نقطہ A کو مرکز مان کر $m\overline{AB}$ رداس کی قوس لگائیں جو \overrightarrow{AN} کو نقطہ D پر قطع کرے۔
- vi. نقاط B اور D کو مرکز مانے ہوئے $m\overline{AB}$ رداس کے برابر دو قوسیں لگائیں۔ یہ قوسیں نقطہ C پر قطع کریں گی۔
- vii. نقطہ C کو نقاط B اور D سے ملائیں۔

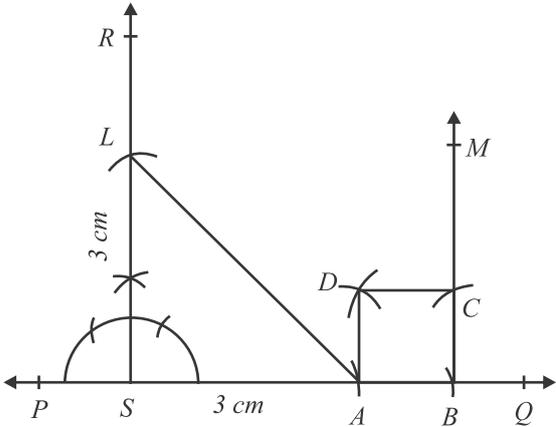
نتیجہ: ABCD مطلوبہ مربع ہے۔

(c) مربع بنانا جب اُس کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا مجموعہ دیا گیا ہو

مثال 3: ایک مربع ABCD بنایے جبکہ اُس کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا مجموعہ 3 cm ہے۔

حل:

مدارج عمل:



- i. خط \overrightarrow{PQ} لیں اور اُس پر ایک نقطہ S لیں۔
- ii. نقطہ S پر $\angle QSR = 90^\circ$ بنائیں۔
- iii. نقطہ S کو مرکز مان کر 3 cm رداس کی دو قوسیں لگائیں جو \overrightarrow{SR} کو نقطہ L پر اور \overrightarrow{SQ} کو نقطہ A پر قطع کریں۔
- iv. نقطہ S کو مرکز مان کر $m\overline{AL}$ رداس کی ایک قوس لگائیں جو \overrightarrow{SQ} کو نقطہ B پر قطع کرے۔

v. \overline{AB} مطلوبہ مربع کے ضلع کی لمبائی ہے۔

vi. نقطہ B پر \overline{BM} عمود لیں۔

vii. نقطہ B کو مرکز مان کر $m\overline{AB}$ رداس کی ایک قوس لگائیں جو \overline{BM} کو نقطہ C پر قطع کرے۔

viii. نقاط C اور A کو مرکز مان کر $m\overline{AB}$ رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ D پر قطع کرے۔

ix. نقطہ D کو نقاط C اور A سے ملائیں۔

نتیجہ: $ABCD$ مطلوبہ مربع ہے۔

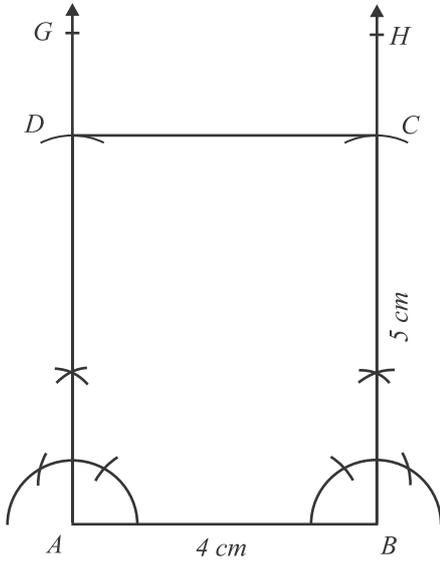
8.1.4 مستطیل کی بناوٹ

(a) مستطیل بنانا جب اُس کے دو اضلاع دیے ہوئے ہوں

مثال 4: مستطیل $ABCD$ بنائیے جبکہ $m\overline{AB} = 4\text{ cm}$ اور $m\overline{BC} = 5\text{ cm}$ ہے۔

حل:

مدارج عمل:



i. $m\overline{AB} = 4\text{ cm}$ لیں۔

ii. \overline{AB} کے نقاط A اور B پر \overline{AG} اور \overline{BH}

\overline{BH} عمود اٹھائے۔ جو کہ نقاط A اور B

پر 90° کا زاویہ بناتے ہیں۔

iii. نقاط A اور B کو مرکز مان کر 5 cm

رداس کی دو قوسیں لگائیں جو \overline{AG}

کو D پر اور \overline{BH} کو نقطہ C پر قطع

کریں۔

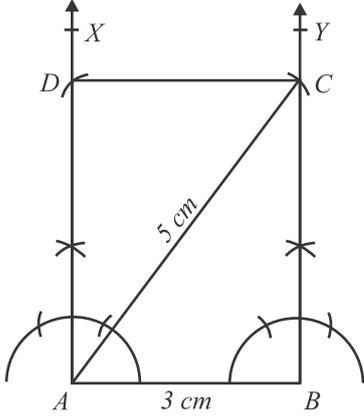
iv. نقاط C اور D کو ملائیں۔

$ABCD$ مطلوبہ مستطیل ہے۔

نتیجہ:

(b) مستطیل بنانا جب وتر اور ایک ضلع دیا ہوا ہو

مثال 5: مستطیل $ABCD$ بنایے جبکہ ایک ضلع $m\overline{AB} = 3\text{cm}$ اور وتر $m\overline{AC} = 5\text{cm}$ ہے۔
حل: مدارج عمل:

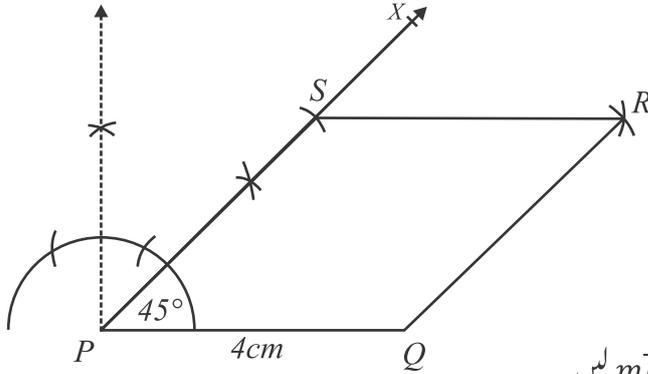


- i. $m\overline{AB} = 3\text{cm}$ لیں۔
 - ii. \overline{AB} کے نقاط A اور B پر \overline{AX} اور \overline{BY} عمود اٹھائے۔ جو کہ نقاط A اور B پر 90° کا زاویہ بناتے ہیں۔
 - iii. نقطہ A کو مرکز مان کر 5cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو \overline{BY} کو نقطہ C پر قطع کرے۔
 - iv. نقطہ B کو مرکز مان کر 5cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو \overline{AX} کو نقطہ D پر قطع کرے۔
 - v. نقطہ C اور D کو ملائیے۔
- نتیجہ: $ABCD$ مطلوبہ مستطیل ہے۔

8.1.5 معین کی بناوٹ

(a) معین بنانا جب ایک ضلع اور قاعدہ پر کا زاویہ دیا ہوا ہو

مثال 6: معین $PQRS$ بنایے جب ایک ضلع $m\overline{PQ} = 4\text{cm}$ اور $m\angle P = 45^\circ$ ہو۔
حل:

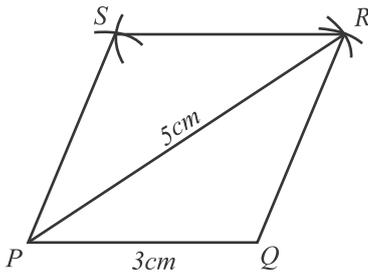


مدارج عمل:

- i. $m\overline{PQ} = 4\text{cm}$ لیں۔
 - ii. $m\angle P = 45^\circ$ بنائیں۔
 - iii. نقطہ P کو مرکز مان کر 4cm رداس کی قوس لگائیں جو \overline{PX} کو نقطہ S پر قطع کرے۔
 - iv. نقاط S اور Q کو مرکز مان کر 4cm رداس کی دو قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ R پر قطع کریں۔
 - v. نقطہ R کو نقاط S اور Q سے ملائیں۔
- نتیجہ: $PQRS$ مطلوبہ معین ہے۔

(b) معین بنانا جب ایک ضلع اور ایک وتر دیا ہوا ہو

مثال 7: ایک معین PQRS بنائیے جب ایک ضلع $m\overline{PQ} = 3\text{cm}$ اور وتر $m\overline{PR} = 5\text{cm}$ ہو۔
حل: مدارج عمل:

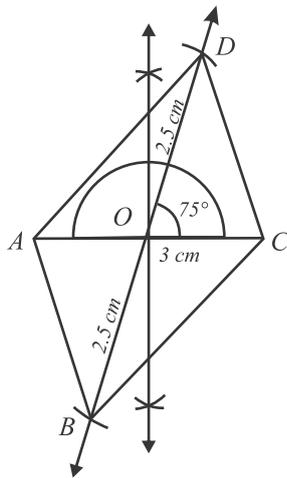


- i. $m\overline{PQ} = 3\text{cm}$ لیں۔
 - ii. نقطہ P کو مرکز مان کر 5cm رداس کی قوس لگائیں۔
 - iii. نقطہ Q کو مرکز مان کر 3cm رداس کی قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ R پر قطع کرے۔
 - iv. نقاط R اور P کو مرکز مان کر 3cm رداس کی دو قوسیں لگائیں جو ایک دوسری کو نقطہ S پر قطع کریں۔
 - v. نقطہ S کو نقاط P اور R سے ملائیں۔
 - vi. نقطہ R کو نقطہ Q سے ملائیں۔
- نتیجہ: PQRS مطلوبہ معین ہے۔

8.1.6 متوازی الاضلاع بنانا

(a) متوازی الاضلاع بنانا جب دو وتروں کی لمبائیاں اور ان کا درمیانی زاویہ دیا ہوا ہو

مثال 8: ABCD متوازی الاضلاع بنائیں جس کے وتروں کی لمبائیاں 3cm اور 5cm ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ 75° کا ہو۔
حل: مدارج عمل:



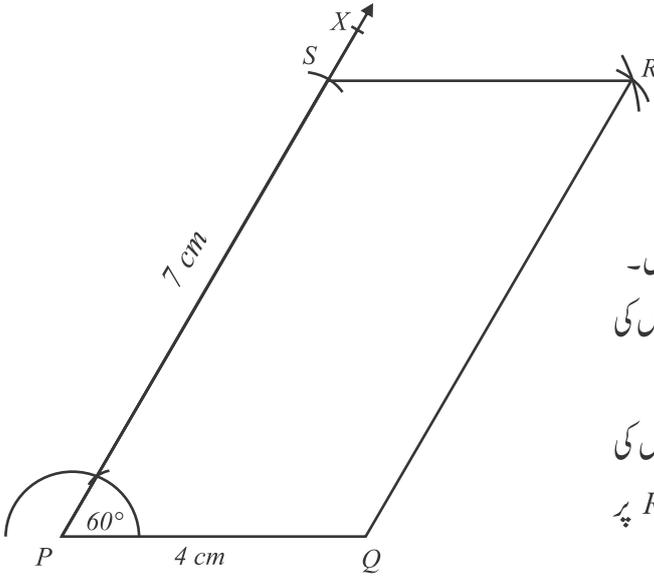
- i. $m\overline{AC} = 3\text{cm}$ لیں۔
 - ii. \overline{AC} کا عمودی ناصف لیں جو \overline{AC} کو نقطہ O پر قطع کرے۔
 - iii. $m\angle COD = 75^\circ$ بنائیں اور زاویہ بنانے والی لائن کو دونوں طرف بڑھائیں۔
 - iv. نقطہ O کو مرکز مان کر $\frac{5}{2} = 2.5\text{cm}$ رداس کی دو قوسیں لگائیں جو پہلی لائن کو نقاط B اور D پر قطع کریں۔
 - v. نقاط A اور C کو نقطہ O سے ملائیں۔
 - vi. نقاط A اور C کو نقطہ B سے ملائیں۔
- نتیجہ: ABCD مطلوبہ معین ہے۔

(b) متوازی الاضلاع بنانا جب دو متصلہ اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دیا ہوا ہو

مثال 9: $PQRS$ متوازی الاضلاع بنائیں جبکہ $m\overline{PQ} = 4\text{cm}$ ، $m\overline{PS} = 7\text{cm}$ اور ان کا درمیانی زاویہ $m\angle QPS = 60^\circ$ ہے۔

حل:

مدارج عمل:



i. $m\overline{PQ} = 4\text{cm}$ لیں۔

ii. نقطہ P پر $m\angle QPX = 60^\circ$ بنائیں۔

iii. \overline{PX} پر $m\overline{PS} = 7\text{cm}$ قطع کریں۔

iv. نقطہ Q کو مرکز مان کر 7cm رداس کی قوس لگائیں۔

v. نقطہ S کو مرکز مان کر 4cm رداس کی

ایک قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ R پر قطع کرے۔

vi. نقطہ R کو نقاط S اور Q سے ملائیں۔

نتیجہ:

$PQRS$ مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

8.1.7 ایک پینگ بنانا جبکہ دو غیر مساوی اضلاع اور ایک وتر دیا ہوا ہو

مثال 10: ایک پینگ $PQRS$ بنائیں جبکہ $m\overline{PQ} = 4\text{cm}$ ، $m\overline{QR} = 6\text{cm}$ اور $m\overline{PR} = 8\text{cm}$ ہے۔

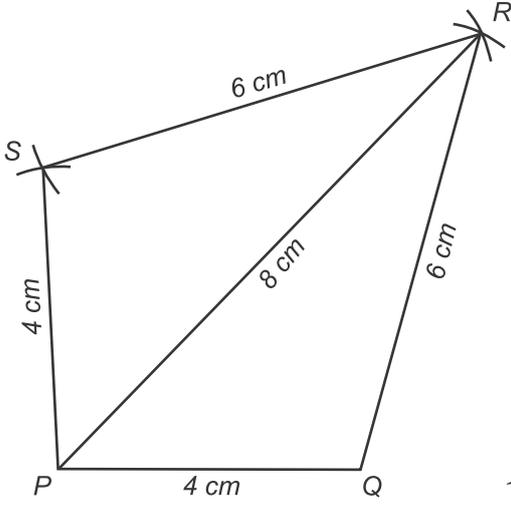
حل:

مدارج عمل:

i. $m\overline{PQ} = 4\text{cm}$ لیں۔

ii. نقطہ Q کو مرکز مان کر 6cm رداس کی ایک قوس لگائیں۔

iii. نقطہ P کو مرکز مان کر 8cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ R پر قطع کرے۔



iv. نقطہ P کو مرکز مان کر 4 cm رداس کی قوس

لگائیں اور نقطہ R کو مرکز مان کر 6 cm رداس

کی قوس لگائیں یہ دونوں قوسیں آپس میں ایک

دوسری کو نقطہ S پر قطع کریں۔

v. نقطہ R کو نقطہ Q سے ملائیں۔

vi. نقطہ S کو نقاط P اور R سے ملائیں۔

نتیجہ: $PQRS$ مطلوبہ پتنگ ہے۔

8.1.8 ایک منظم خمیس بنانا جبکہ اُس کے ضلع کی لمبائی دی ہوئی ہو

مثال 11: ایک منظم خمیس $PQRST$ بنائیں جبکہ $m\overline{PQ} = 4\text{ cm}$ ایک ضلع کی لمبائی ہے۔

حل: مدارج عمل:

i. $m\overline{PQ} = 4\text{ cm}$ لیں۔

ii. $m\angle P$ اور $m\angle Q$ میں سے ہر ایک زاویہ 108° کا بنائیں۔

[نوٹ: ایک خمیس کا ہر اندرونی زاویہ 108° کا ہوتا ہے۔]

iii. نقطہ P کو مرکز مان کر 4 cm رداس

کی قوس لگائی جو \overline{PX} کو نقطہ T

پر قطع کرے۔

iv. نقطہ Q کو مرکز مان کر 4 cm رداس

کی قوس لگائی جو \overline{QY} کو نقطہ R پر

قطع کرے۔

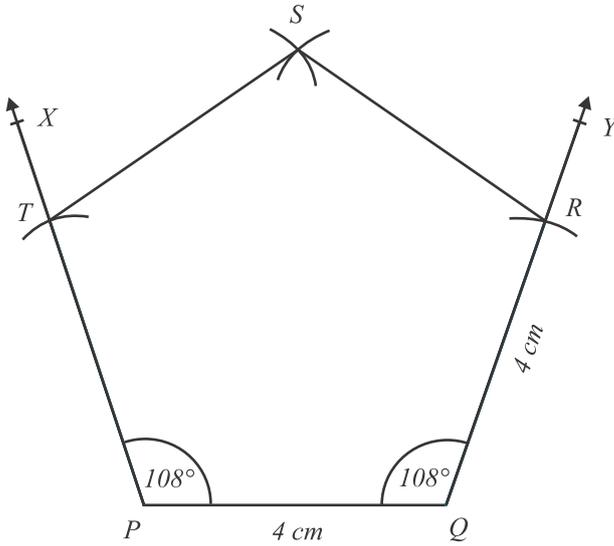
v. نقاط T اور R کو مرکز مان کر 4 cm

رداس کی قوسیں لگائیں جو ایک دوسری

کو نقطہ S پر قطع کریں۔

vi. نقطہ S کو نقاط R اور T سے ملائیں۔

نتیجہ: $PQRST$ مطلوبہ منظم خمیس ہے۔

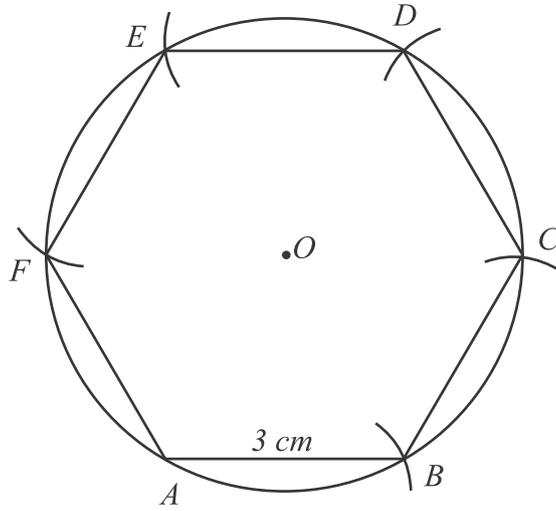


8.1.9 ایک منظم مسدس بنانا جب اُس کے ضلع کی لمبائی دی ہوئی ہو
مثال 12: ایک منظم مسدس $ABCDEF$ بنائیں جبکہ $m\overline{AB} = 3\text{cm}$ ایک ضلع کی لمبائی ہے۔

حل:

مدارج عمل:

i. کوئی نقطہ O لیں اور اسے مرکز مان کر 3cm رداس کا دائرہ لگائیں۔



- ii. دائرہ پر ایک نقطہ A لیں۔ A کو مرکز مان کر 3cm رداس کی قوس لگائیں جو دائرہ کو نقطہ B پر قطع کرے۔
- iii. نقطہ B کو مرکز مان کر 3cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو دائرہ کو نقطہ C پر قطع کرے۔
- iv. نقطہ C کو مرکز مان کر 3cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو دائرہ کو نقطہ D میں قطع کرے۔
- v. نقطہ D کو مرکز مان کر 3cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو دائرہ کو نقطہ E پر قطع کرے۔
- vi. نقطہ E کو مرکز مان کر 3cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو دائرہ کو نقطہ F پر قطع کرے۔
- vii. نقطہ B کو C سے، C کو D سے، D کو E سے، E کو F سے اور F کو A سے ملائیں۔

نتیجہ:

$ABCDEF$ مطلوبہ منظم مسدس ہے۔

مشق 8.1

- 1- مربع $ABCD$ بنائیں جبکہ وتر کی لمبائی $m\overline{AC} = 4.5\text{cm}$ ہو۔
- 2- مربع $PQRS$ بنائیں جبکہ وتر کی لمبائی ضلع کی لمبائی سے 4cm زیادہ ہے۔
- 3- مربع $PQRS$ بنائیں جبکہ وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا مجموعہ 8cm ہے۔
- 4- مستطیل $ABCD$ بنائیں جبکہ $m\overline{AB} = 4\text{cm}$ اور $m\overline{BC} = 6\text{cm}$ ہے۔
- 5- مستطیل $ABCD$ بنائیں جبکہ $m\overline{AB} = 5.5\text{cm}$ اور $m\overline{AC} = 8\text{cm}$ ہے۔
- 6- معین $KLMN$ بنائیں جبکہ $m\overline{KL} = 5\text{cm}$ اور $m\angle K = 75^\circ$ ہے۔
- 7- معین $STUV$ بنائیں جبکہ $m\overline{ST} = 6\text{cm}$ اور $m\overline{SU} = 9\text{cm}$ ہے۔
- 8- متوازی الاضلاع $ABCD$ بنائیں جبکہ اس کے وتروں کی لمبائیاں 6cm اور 8cm ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ 70° کا ہے۔
- 9- متوازی الاضلاع $DEFG$ بنائیں جبکہ $m\overline{DE} = 5.5\text{cm}$ ، $m\overline{EF} = 6.5\text{cm}$ اور $m\angle E = 60^\circ$ ہے۔
- 10- پتنگ $DEFG$ بنائیں جب کہ $m\overline{DE} = 4\text{cm}$ ، $m\overline{EF} = 8\text{cm}$ اور بڑے وتر کی لمبائی $m\overline{DF} = 10\text{cm}$ ہے۔
- 11- منظم خمیس $ABCDE$ بنائیں جبکہ $m\overline{AB} = 3.2\text{cm}$ ہے۔
- 12- منظم سدس $STUVWX$ بنائیں جبکہ $m\overline{ST} = 3\text{cm}$ ہے۔

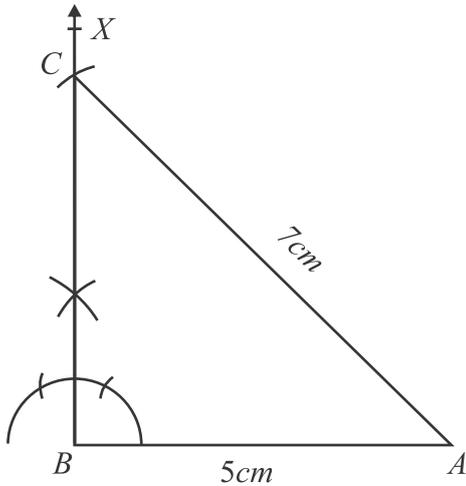
8.2 قائمہ الزاویہ مثلث کی بناوٹ

(a) قائمہ الزاویہ مثلث بنانا جب وتر اور ایک ضلع دیا ہو

مثال 1: قائمہ الزاویہ مثلث ABC بنائیے جبکہ $m\overline{AB} = 5\text{cm}$ ، $m\overline{AC} = 7\text{cm}$ اور $m\angle B = 90^\circ$ ہے۔

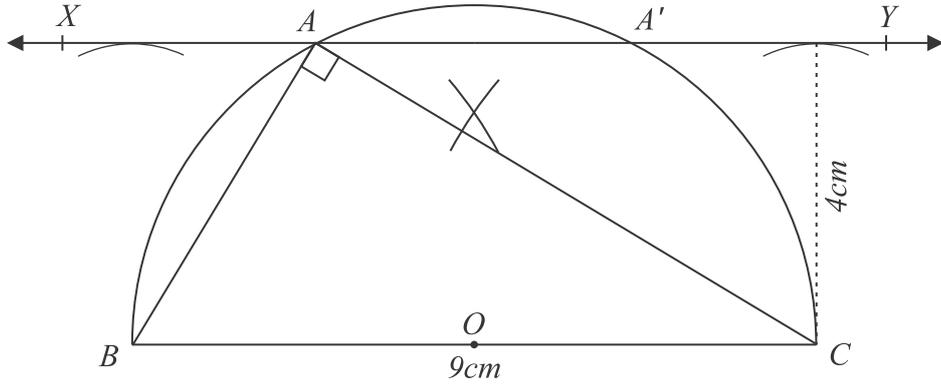
حل:

مدارج عمل:



- i. $m\overline{AB} = 5\text{cm}$ لیں۔
 - ii. $m\angle B$ قائمہ زاویہ بنائیں۔
 - iii. نقطہ A کو مرکز مان کر 7cm رداس کی ایک قوس لگائیں جو \overline{BX} کو نقطہ C پر قطع کرے۔
 - iv. نقطہ A کو C سے ملائیں۔
- نتیجہ: ABC مطلوبہ قائمہ الزاویہ مثلث ہے۔

- (b) قائمہ الزاویہ مثلث بنانا جب وتر اور نقطہ راس سے وتر تک کے فاصلہ کی پیمائش معلوم ہو
- مثال 2: قائمہ الزاویہ مثلث ABC بنایے جبکہ $m\overline{BC} = 9\text{cm}$ اور \overline{AL} ، \overline{BC} پر عمود ہے اور $m\overline{AL} = 4\text{cm}$ ہے۔
- حل:
- مدارج عمل:



- i. $m\overline{BC} = 9\text{cm}$ کھینچنا۔
 - ii. پرکار کی مدد سے \overline{BC} کی نقطہ O پر تنصیف کی۔
 - iii. نقطہ O کو مرکز مان کر $m\overline{OB}$ یا $m\overline{OC}$ رداس کا نصف دائرہ لگایا۔
 - iv. نقاط B اور C کو مرکز مان کر \overline{BC} اوپر 4cm رداس کی قوسیں لگائیں۔
 - v. اوپر لگائی گئی دونوں قوسوں کو مس کرتا ہوا \overline{XY} کھینچنا جس نے نصف دائرہ کو نقاط A اور A' پر قطع کیا۔
 - vi. نقطہ A کو نقاط B اور C سے ملایا۔
- پس ΔABC مطلوبہ قائمہ الزاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ A قائمہ زاویہ ہے۔

مشق 8.2

- 1- درج ذیل پیمائشوں کی قائمہ الزاویہ مثلثیں بنائیں۔
 (a) وتر 8.5 cm اور ایک ضلع کی لمبائی 6 cm ہو۔
 (b) وتر 6 cm اور ایک ضلع کی لمبائی 3 cm ہو۔
 (c) وتر 5 cm اور ایک ضلع کی لمبائی 2.5 cm ہو۔
- 2- ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC بنائیے جبکہ $m\overline{AB} = 4.5\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 5.5\text{ cm}$ اور $m\angle B = 90^\circ$ ہو۔
- 3- ایک قائمہ الزاویہ مثلث PQR بنائیے جبکہ $m\overline{QR} = 8\text{ cm}$ ، $m\overline{PQ} = 5\text{ cm}$ اور $m\angle Q = 90^\circ$ ہو۔

جائزہ مشق 8

- 1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔
- (i) اگر ایک کثیرالاضلاع شکل جس کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 360° ہو تو اسے کیا کہتے ہیں؟
 (a) مثلث (b) چوکور (c) مخمس (d) مسدس
- (ii) مربع کے وتروں کے متعلق کون سا بیان درست ہے؟
 (a) ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں (b) ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے
 (c) ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں (d) ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کرتے
- (iii) کسی منظم مخمس کے ہر اندرونی زاویہ کی مقدار کتنی ہوتی ہے؟
 (a) 100° (b) 108° (c) 116° (d) 124°
- (iv) مستطیل کے وتروں کے متعلق کون سا بیان درست ہے؟
 (a) ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں (b) ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں
 (c) ایک دوسرے کے متوازی ہیں (d) کوئی جواب درست نہیں
- (v) معین کے وتر کے متعلق کون سا بیان درست ہے؟
 (a) اس کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں (b) لمبائی میں برابر ہوتے ہیں
 (c) ایک دوسرے پر عمود نہیں ہوتے ہیں (d) تینوں جوابات درست ہیں
- (vi) مربع کی ایک خوبی کیا ہے؟
 (a) کوئی جواب درست نہیں (b) مثلث (c) چوکور (d) مخمس
- (vii) ایک منظم مسدس کے ہر اندرونی زاویہ کی مقدار کتنی ہوتی ہے؟
 (a) 108° (b) 120° (c) 140° (d) 170°
- (viii) اگر ایک چوکور کے تین اندرونی زاویے 108° ، 128° اور 76° ہوں تو چوتھے اندرونی زاویے کی مقدار کیا ہوگی؟
 (a) 48° (b) 88° (c) 98° (d) 108°

2- درج ذیل اشکال بنائیے۔

- (i) ایک مربع PQRS جبکہ $m\overline{RS} = 4cm$ ہو۔
- (ii) ایک مربع ABCD جبکہ $m\overline{AC} = 3.5cm$ ہو۔
- (iii) مربع WXYZ جبکہ اس کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا فرق $5cm$ ہو۔
- (iv) مربع PQRS جبکہ اس کے وتر اور ضلع کی لمبائیوں کا مجموعہ $8cm$ ہو۔
- (v) مستطیل ABCD جبکہ $m\overline{AB} = 5.5cm$ اور $m\overline{BC} = 8cm$ ہو۔
- (vi) مستطیل LMNO جبکہ $m\overline{LM} = 4cm$ اور $m\overline{LN} = 6cm$ ہو۔
- (vii) معین PQRS جبکہ $m\overline{PQ} = 5.5cm$ اور $m\angle P = 75^\circ$ ہو۔
- (viii) متوازی الاضلاع ABCD جس کے وتر $5cm$ اور $9cm$ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ 80° ہو۔
- (ix) متوازی الاضلاع UVWX جبکہ $m\overline{UV} = 8cm$ ، $m\overline{UX} = 5cm$ اور $m\angle U = 60^\circ$ ہو۔
- (x) پتنگ ABCD جبکہ $m\overline{AB} = 4cm$ ، $m\overline{BC} = 6cm$ اور بڑے وتر کی لمبائی $m\overline{AC} = 7cm$ ہو۔
- (xi) منظم مخمس GHIJK جبکہ $m\overline{GH} = 4cm$ ہو۔

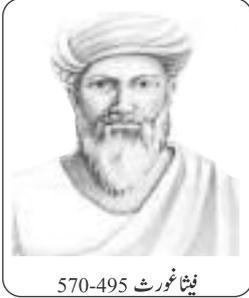
خلاصہ

- چوکور ایک چار ضلعی کثیر الاضلاع ہے جس کے اندرونی زاویوں کی مقدار 360° ہے۔
- غیر متوازی خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔
- مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع اور معین کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع اور معین کے وتر ایک دوسرے کی 90° پر تنصیف کرتے ہیں۔
- مربع اور مستطیل کے وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- ایک منظم مسدس کے زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 720° ہوتا ہے اور ہر ایک زاویہ 120° کا ہوتا ہے۔
- ایک منظم مخمس کے زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 540° ہوتا ہے اور ہر ایک زاویہ 108° کا ہوتا ہے۔



اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

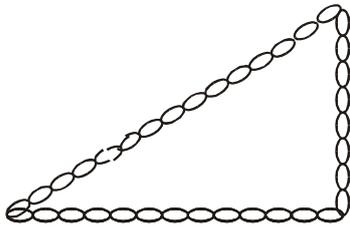
- مسئلہ فیثاغورث کو بیان کر سکیں اور غیر رسمی ثبوت دے سکیں۔
- مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے قائمہ الزاویہ مثلث کو حل کر سکیں۔
- ہیرو کے کلیہ کی مدد سے مثلثی علاقہ اور چوکور علاقہ جات کا رقبہ معلوم کر سکیں۔
- کڑہ کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کر سکیں۔
- مخروط کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کر سکیں۔
- روزمرہ زندگی سے کڑہ اور مخروط کے رقبہ اور حجم سے متعلقہ مسائل حل کر سکیں۔



فیثاغورث 495-570

9.1 مسئلہ فیثاغورث (Pythagoras Theorem)

جیومیٹری میں مسئلہ فیثاغورث خاص اہمیت کا حامل ہے۔ اس مسئلہ کا نام یونانی ریاضی دان فیثاغورث کے نام پر 2500 سال پہلے رکھا گیا تھا۔ اُس زمانے میں مصری، دریائے نیل کی چوڑائی معلوم کرنے کا ایک طریقہ استعمال کرتے تھے۔ فیثاغورث نے اُس طریقہ پر غور کیا اور اس مسئلہ نے جنم لیا۔



وہ ایک زنجیر کی مدد سے دریائے نیل کی چوڑائی معلوم کرتے تھے جس کے اضلاع میں 3 : 4 : 5 کی نسبت تھی۔

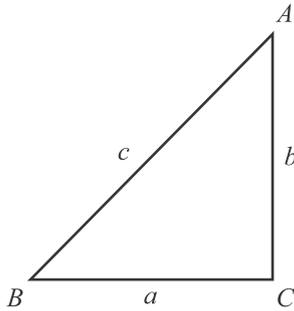
9.1.1 مسئلہ فیثاغورث کو بیان کرنا

ABC ایک قائمہ الزاویہ مثلث ہے جس کا $\angle C$ قائمہ ہے۔ a ، b اور c

بالترتیب زاویہ A ، B اور C کے متقابلہ اضلاع ہیں۔

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{تو}$$

$$(\text{وتر})^2 = (\text{ارتفاع})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$



یاد رکھیے۔

قائمہ زاویہ کے متقابلہ ضلع کو وتر کہتے ہیں۔ زاویہ قائمہ کے ساتھ متصلاً فیضی ضلع قاعدہ اور متصلاً عمودی ضلع ارتفاع کہلاتا ہے۔

(Informal Proof of Pythagoras Theorem) مسئلہ فیثاغورث کا غیر رسمی ثبوت

ایک سرگرمی کی مدد سے مسئلہ فیثاغورث کا ثبوت دیتے ہیں۔

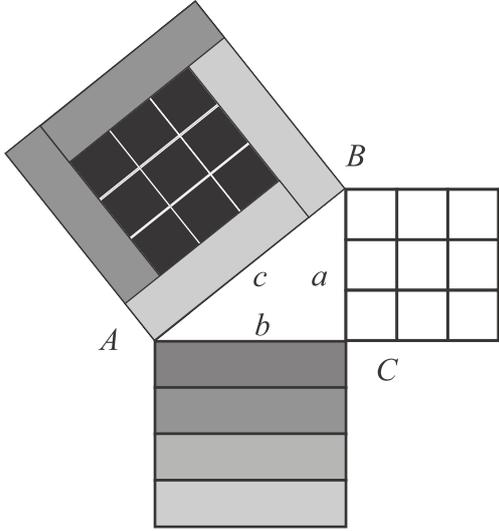
سرگرمی

سامان: مضبوط کاغذ، پنسل، پیمانہ، قینچی، رنگ دار پنسلیں

پہلا مرحلہ: ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC بنائیں جس کا زاویہ C قائمہ ہے اور اضلاع a ، b اور c ہیں

$$a : b : c = 3 : 4 : 5 \quad \text{اور} \quad \angle C = 90^\circ$$

دوسرا مرحلہ: اضلاع a, b, c اور c پر مربعے مکمل کیجیے۔



تیسرا مرحلہ: چونکہ $a : b : c = 3 : 4 : 5$ کی نسبت میں ہیں۔ اس لیے a, b, c اضلاع پر بنے ہوئے مربعوں کو 3، 4 اور 5 یکساں چوڑائی کی پٹیوں (strips) میں تقسیم کریں۔

چوتھا مرحلہ: پٹیوں پر مختلف رنگ کر لیں۔

پانچواں مرحلہ: ضلع a پر بنے ہوئے مربع کو کاٹ لیں اور c پر بنے ہوئے مربع کے درمیان رکھ لیں۔

چھٹا مرحلہ: ضلع b پر بنے ہوئے مربع کی پٹیوں کو علیحدہ علیحدہ کاٹ لیں۔ اور ان پٹیوں کو ضلع c پر بنے ہوئے مربع میں لگا دیں۔ ہم دیکھ سکتے ہیں ضلع c پر بنے ہوئے مربع کا رقبہ ضلع a, b پر بنے ہوئے دونوں مربعوں کے رقبہ کے مجموعہ کے برابر ہے۔

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{یعنی}$$

$$(\text{وتر})^2 = (\text{ارتفاع})^2 + (\text{قاعدہ})^2$$

9.1.1 مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے قائمہ الزاویہ مثلث کا حل

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے قائمہ الزاویہ مثلث کے تیسرے ضلع کی لمبائی معلوم کی جاتی ہے جبکہ دو اضلاع کی لمبائیاں دی ہوئی

ہوں۔

اگر قائمہ الزاویہ کے متقابلہ ضلع کی لمبائی c ہو تو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{یا}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{یا}$$

مثال 1: مثلث ABC میں ضلع \overline{AB} کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: فرض کریں:

$$m\overline{AB} = x$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2, m\angle C = 90^\circ$$

$$c = x, \quad a = 5\text{ cm}, \quad b = 12\text{ cm} \quad \text{جبکہ}$$

$$x^2 = (5)^2 + (12)^2 \quad \text{اس لیے}$$

$$= 25 + 144$$

$$x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169} = 13\text{ cm}$$

$$m\overline{AB} = 13\text{ cm} \quad \text{پس}$$

مثال 2: ایک مستطیل کی لمبائی 8 سینٹی میٹر اور چوڑائی 6 سینٹی میٹر ہے۔ اس کے وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: $ABCD$ ایک مستطیل ہے۔

فرض کیا:

$$m\overline{BD} = x\text{ cm}$$

اب BCD قائمہ الزاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ C قائمہ ہے۔

$$\text{قاعدہ} = m\overline{BC} = 8\text{ cm}$$

$$\text{ارتفاع} = m\overline{CD} = 6\text{ cm}$$

$$\text{وتر} = m\overline{BD} = x\text{ cm}$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

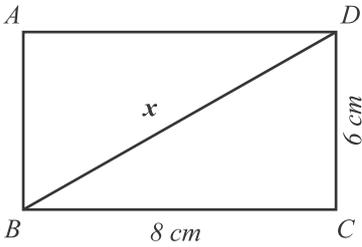
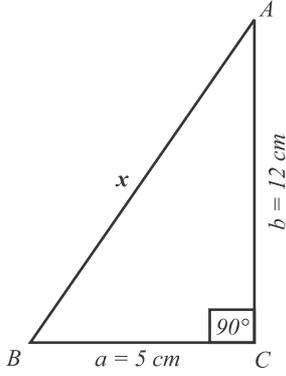
$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100} \quad \text{اس لیے}$$

$$x = 10\text{ cm}$$

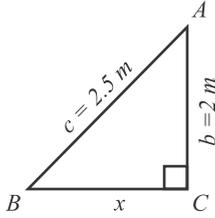
چونکہ مستطیل کے دونوں وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں اس لیے دوسرے وتر \overline{AC} کی لمبائی بھی 10 سینٹی میٹر ہے۔



مثال 3: ایک سیرھی کی لمبائی $2.5m$ ہے۔ اسے دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا اوپر والا سیرا دیوار کی 2 میٹر اونچائی تک پہنچا۔ اس کا نچلا سیرا دیوار سے کتنا دور ہے؟

حل: فرض کیا سیرھی کے نچلے سرے کا دیوار سے فاصلہ x میٹر ہے۔

$$c = 2.5m, \quad a = x, \quad b = 2m \quad \text{یہاں}$$



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$x^2 = (2.5)^2 - (2)^2 \quad \text{یا}$$

$$= 6.25 - 4$$

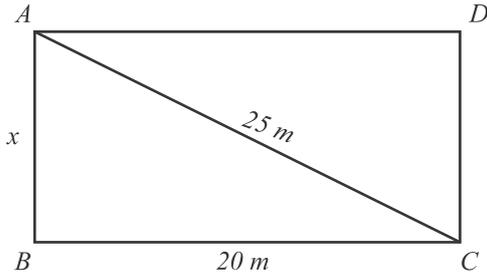
$$x^2 = 2.25$$

$$x = 1.5m \quad \text{یا}$$

مثال 4: ایک مستطیل کھیت کا رقبہ معلوم کریں۔ جبکہ اس کا طول $20m$ ہے اور وتر کی لمبائی $25m$ ہے۔

حل: ABC مثلث لیجیے۔

یہاں زاویہ B قائمہ ہے۔



$$b = 25m, \quad a = 20m$$

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے c معلوم کرتے ہیں۔

$$c = xm$$

فرض کیا

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$x^2 = (25)^2 - (20)^2 = 625 - 400$$

$$x^2 = 225$$

$$x = \sqrt{225}$$

یا

$$x = 15m$$

$$\text{مستطیل کا رقبہ} = \text{چوڑائی} \times \text{لمبائی}$$

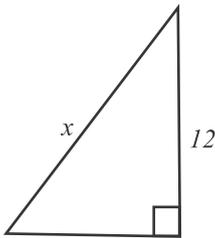
$$= 20 \times 15$$

$$= 300m^2$$

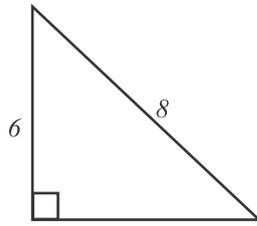
یوں

مشق 9.1

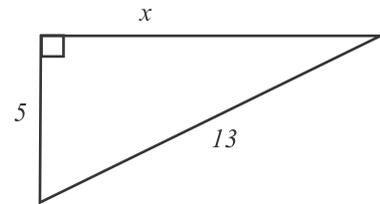
1- نیچے دی گئی قائمہ الزاویہ مثلثوں میں نامعلوم اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔



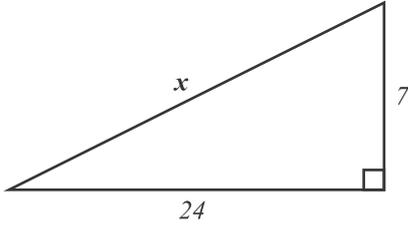
(i)



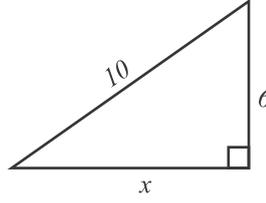
(ii)



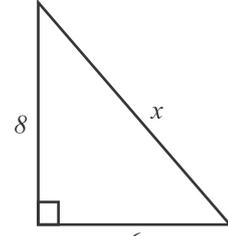
(iii)



(iv)

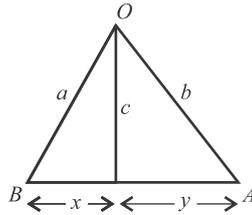


(v)



(vi)

- 2- ایک مساوی الساقین قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کے مربع کا رقبہ 98 مربع سینٹی میٹر ہے۔ متماثل اضلاع میں سے ہر ایک کی لمبائی معلوم کریں۔
- 3- ایک سیرٹھی کی لمبائی 10 میٹر ہے۔ اس کا نچلا سرا دیوار سے 6 میٹر دور ہے۔ بتائیے سیرٹھی کا اوپر والا سرا دیوار کی کتنی اونچائی تک پہنچا؟
- 4- قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں $\angle C = 90^\circ$ اور $m\overline{BC} = 2.1\text{cm}$ اور $m\overline{AC} = 7.2\text{cm}$ کی لمبائی معلوم کریں۔
- 5- دی ہوئی شکل میں ثابت کریں کہ $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$



- 6- ایک کھجے کا سایہ 2.8 میٹر لمبا ہے۔ سایہ کی نوک اور کھجے کی نوک کا درمیانی فاصلہ 10.5 میٹر ہے۔ کھجے کی اونچائی کی معلوم کریں۔
- 7- اگر مثلث ABC کے اضلاع a, b, c ہوں تو بتائیے کہ نیچے دی گئی اضلاع کی لمبائیوں میں سے کون کون سی مثلثان قائمہ الزاویہ ہیں۔ $\angle A, \angle B, \angle C$ میں سے کوئی بھی زاویہ قائمہ ہو سکتا ہے۔

(i) $a = 6, b = 5, c = 7$

(ii) $a = 8, b = 9, c = \sqrt{145}$

(iii) $a = 12, b = 5, c = 13$

- 8- قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں وتر c ہے۔ اور دوسرے اضلاع a, b ہیں۔ نامعلوم لمبائی معلوم کیجیے

(i) $a = 60\text{cm}, c = 61\text{cm}, b = ?$

(ii) $a = \frac{5}{12}\text{cm}, c = \frac{13}{12}\text{cm}, b = ?$

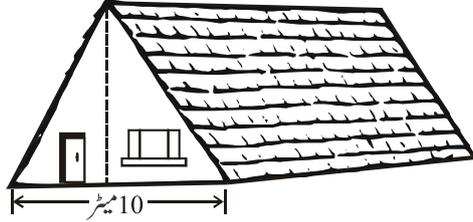
(iii) $a = 2.4\text{m}, c = 2.6\text{m}, b = ?$

(iv) $b = 10\text{m}, a = 4\sqrt{5}\text{m}, c = ?$

(v) $b = 5\text{dm}, a = 5\sqrt{7}\text{dm}, c = ?$

(vi) $c = 10\sqrt{2}\text{dm}, b = 5\sqrt{3}\text{dm}, a = ?$

9- ایک مکان کا سامنا حصہ مساوی الاضلاع مثلث جیسا ہے اور اس کے ایک ضلع کی لمبائی 10 میٹر ہے مکان کی اونچائی معلوم کریں۔



9.2 ہیرو کا کلیہ (Hero's Formula)

پچھلی جماعتوں میں ہم مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ اور بھی کئی ایک طریقے ہیں جن کی مدد سے ہم مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں ان میں سے ایک ہیرو کا کلیہ ہے۔

یونان میں سکندر یہ کارہنے والا ایک ریاضی دان ہیرو تھا۔ اُس نے یہ کلیہ دریافت کیا اور اُسی کے نام سے اس کلیہ کا نام رکھا گیا ہے۔ یہ کلیہ اس وقت لاگو ہوتا ہے جب مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہوں۔

9.2.1 ہیرو کا کلیہ

اگر مثلث ABC کے اضلاع کی لمبائیوں کو a, b, c اور c سے ظاہر کیا جائے تو مثلث ABC کے رقبہ کو $\triangle ABC$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{جبکہ} \quad \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{اور}$$

• مثلثی اور چوکوروی علاقہ جات کا رقبہ معلوم کرنا

مثال 1: ایک مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جبکہ اُس کے اضلاع کی لمبائیاں $14\text{cm}, 21\text{cm}$ اور 25cm ہیں۔

حل: فرض کریں:

$$c = 25\text{cm} \quad \text{اور} \quad b = 21\text{cm} \quad , \quad a = 14\text{cm}$$

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{کلیہ:}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{جبکہ:}$$

$$s = \frac{14+21+25}{2} \quad \text{اب}$$

$$= \frac{60}{2} = 30$$

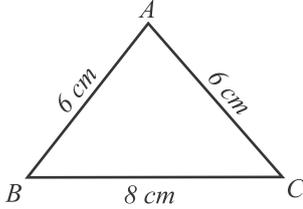
$$\triangle ABC = \sqrt{30(30-14)(30-21)(30-25)}$$

$$\triangle ABC = \sqrt{30 \times 16 \times 9 \times 5} = \sqrt{5 \times 6 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}$$

$$= \sqrt{3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6} \quad \text{اور} \quad = 3 \times 4 \times 5 \sqrt{6}$$

$$\triangle ABC = 60\sqrt{6} \text{ cm}^2$$

مثال 2: ایک مساوی الساقین مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ معلوم کریں۔
جبکہ $m\overline{BC} = 8\text{ cm}$ اور $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 6\text{ cm}$



حل: $\triangle ABC$ کے اضلاع c, b, a لیتے ہیں
یعنی $c = 6\text{ cm}$ اور $b = 6\text{ cm}$ ، $a = 8\text{ cm}$
کلیہ: $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{8+6+6}{2} = \frac{20}{2} = 10\text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \sqrt{10(10-8)(10-6)(10-6)} \\ &= \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \\ &= \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \\ &= 2 \times 4 \sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

• ہیرو کے کلیہ کی مدد سے چوکوروی علاقہ جات کا رقبہ معلوم کرنا

چوکور کا وتر اُسے دو مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ہیرو کے کلیہ کی مدد سے دونوں مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کر کے جمع کر لیا جاتا ہے۔

اس طرح چوکوروی علاقہ کا رقبہ معلوم ہو جاتا ہے۔

مثال 3: چوکوروی علاقہ $ABCD$ کا رقبہ معلوم کریں۔

جبکہ $m\overline{BD} = 31\text{ cm}$ اور $m\overline{DA} = 25\text{ cm}$ ، $m\overline{CD} = 22\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 17\text{ cm}$ ، $m\overline{AB} = 12\text{ cm}$

حل: $\triangle ABD + \triangle BCD =$ چوکوروی علاقہ $ABCD$ کا رقبہ۔

پہلے مثلثی علاقہ ABD کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$s = \frac{12 + 31 + 25}{2}$$

$$= \frac{68}{2} = 34\text{ cm}$$

$$\triangle ABD = \sqrt{34(34-12)(34-31)(34-25)}$$

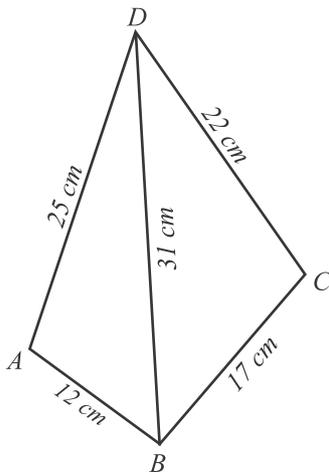
$$= \sqrt{34 \cdot 22 \cdot 3 \cdot 9}$$

$$= \sqrt{17 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$= 2 \times 3 \sqrt{17 \cdot 33}$$

$$= 6 \times 23.69$$

$$= 142.14 \text{ cm}^2 \text{ (تقریباً)}$$



▲BCD کے لیے:

$$s = \frac{17 + 22 + 31}{2}$$

$$= \frac{70}{2} = 35 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \triangle BCD &= \sqrt{35(35-17)(35-22)(35-31)} \\ &= \sqrt{35 \cdot 18 \cdot 13 \cdot 4} = \sqrt{35 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 4} \\ &= 6 \sqrt{26 \cdot 35} = 6 \times 30.16 \\ &= 180.96 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{چوکوروی علاقہ } ABCD \text{ کا رقبہ} &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= 142.14 + 180.96 \\ &= 323.10 \text{ cm}^2 \text{ (تقریباً)} \end{aligned}$$

مشق 9.2

1- ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 60m، 153m اور 111m ہے۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں۔

2- مثلثی علاقہ جات کے رقبے معلوم کریں جبکہ اضلاع کی لمبائیاں دی ہوئی ہیں۔

(i) 13cm, 14cm, 15cm

(ii) 5cm, 12cm, 13cm

(iii) 103cm, 115cm, 13cm

3- ہیرو کے کلیہ کی مدد سے نامعلوم پیکش معلوم کریں۔

(i) $a = 5m$, $b = 7m$, $s = 9m$, $c = \text{-----}$, $\triangle ABC = \text{-----}$

(ii) $a = 10m$, $b = 8m$, $s = 12m$, $c = \text{-----}$, $\triangle ABC = \text{-----}$

(iii) $a = 3m$, $s = 9.5m$, $c = 9m$, $b = \text{-----}$, $\triangle ABC = \text{-----}$

(iv) $a = 3.5m$, $b = 2.5m$, $c = 4.5m$, $s = \text{-----}$, $\triangle ABC = \text{-----}$

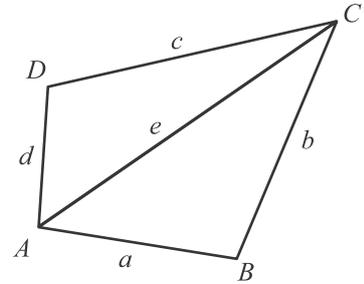
4- ABCD چوکوروی علاقہ جات کا رقبہ معلوم کریں جبکہ تمام پیکشیں سینٹی میٹر (cm) میں ہیں۔

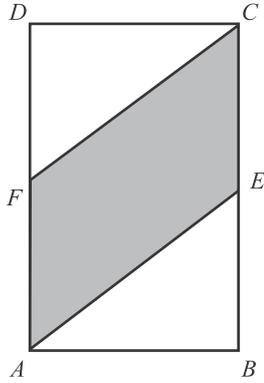
(i) $a = 19$, $b = 12$, $c = 15$, $d = 20$ اور $e = 23$

(ii) $a = 12$, $b = 14$, $c = 17$, $d = 19$ اور $e = 21$

(iii) $a = 2$, $b = 2.5$, $c = 3$, $d = 1.5$ اور $e = 3.5$

(iv) $a = 1.7$, $b = 1$, $c = 1.3$, $d = 1.8$ اور $e = 2.1$



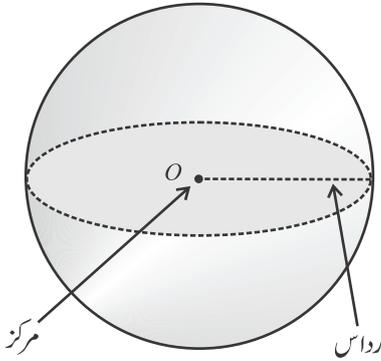


5- دی ہوئی شکل ایک مستطیل $ABCD$ کی ہے جس کے اضلاع 8 سم اور 12 سم ہیں۔ نقطہ E ضلع BC کا وسطی نقطہ ہے اور نقطہ F ضلع AD کا وسطی نقطہ ہے ہیرو کے کلیہ اور مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے رقبہ معلوم کریں۔

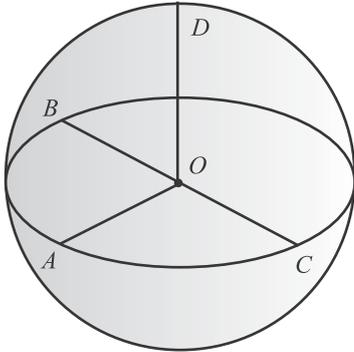
(i) مثلثی علاقہ ABE اور FDC کا

(ii) متوازی الاضلاع $AECF$ کا

9.3 کرّہ کی سطح کا رقبہ اور حجم (Surface Area and Volume of Sphere)



کرّہ ایک ٹھوس مجسم ہے جسے ایک کروئی سطح نے گھیرا ہوتا ہے۔ اور اس کی بیرونی سطح پر کا ہر ایک نقطہ ایک مقررہ نقطہ سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے یہ مقررہ نقطہ کرّہ کے اندر ہوتا ہے اور اسے کرّہ کا مرکز (center) کہتے ہیں۔ کرّہ کے مرکز سے اُس کی بیرونی سطح کا فاصلہ کرّہ کا رداس کہلاتا ہے۔ (radius) ہے۔



قطععات خط OA ، OB ، OC اور OD کی لمبائی کی

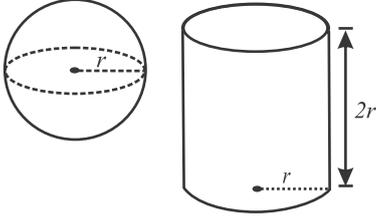
پیمائشیں برابر ہیں اور آپس میں یکساں ہیں۔

کرّہ کی ایک مثال کرکٹ گیند ہے۔

9.3.1 کرّہ کی سطح کا رقبہ اور کرّہ کا حجم (جسامت) معلوم کرنا

• کرّہ کی سطح کا رقبہ

کرّہ کی سطح کا رقبہ مشہور و معروف ریاضی دان ارشمیدس نے دریافت کیا کہ اس کی سطح کا رقبہ اُس بیلن کی کروئی سطح کے برابر ہے جس کا رداس کرّہ کے رداس کے برابر ہے اور بلندی اس رداس سے دوگنی ہو۔



$$\begin{aligned} \text{فرض کریں کڑہ کا رداس} &= r \\ \text{بیلن کا رداس} &= r \\ \text{بیلن کی بلندی} &= h = 2r \\ \text{بیلن کی کروی سطح کا رقبہ} &= 2\pi r h \\ \text{کڑہ کی سطح کا رقبہ} &= 2\pi r(2r) \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

مثال 1: ایک کڑہ کا رداس 21cm ہے۔ اُس کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔
حل: $4\pi r^2 = \text{کڑہ کی سطح کا رقبہ}$

$$r = 21\text{cm}, \quad \pi = \frac{22}{7} \quad \text{یہاں}$$

$$\begin{aligned} \text{کڑہ کی سطح کا رقبہ} &= 4 \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \end{aligned}$$

$$\text{کڑہ کی سطح کا رقبہ} = 5544\text{cm}^2$$

مثال 2: کڑہ کا رداس معلوم کریں جبکہ اُس کی سطح کا رقبہ 6.16m^2 ہے۔
حل: $A = \text{فرض کریں کڑہ کی سطح کا رقبہ}$

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{تو}$$

$$A = 6.16\text{m}^2 \quad \text{اور} \quad \pi = \frac{22}{7} \quad \text{یہاں}$$

$$4\pi r^2 = 6.16\text{m}^2 \quad \text{یوں}$$

$$\text{یا} \quad r^2 = \frac{6.16}{4\pi}$$

$$r^2 = \frac{6.16 \times 7}{4 \times 22}$$

$$r^2 = 0.49\text{m}^2$$

$$r = \sqrt{0.49}$$

$$\text{یا} \quad r = 0.7\text{m}$$

گڑہ کا حجم (جسامت) (Volume of a Sphere)

$$\text{گڑہ کا حجم} = V = \frac{2}{3} \quad (\text{بیلن کا حجم})$$

جب رداس r اور اونچائی $2r$ ہو

$$V = \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{گڑہ کا حجم جبکہ رداس } r \text{ ہے} = V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

مثال 3: ایک کروی ٹینک میں کتنے لٹر پانی آسکتا ہے جبکہ اُس کا رداس 1.4 میٹر ہے۔

حل: یہاں $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (1.4)^3 \quad (r = 1.4m \text{ جبکہ})$$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \times 1.4$$

$$= 11.499m^3$$

$$= 11.499 \times 1000 \quad (1m^3 = 1000 L)$$

$$= 11499 L \text{ (لٹر)}$$

مثال 4: گڑہ کا حجم معلوم کریں جبکہ اُس کی سطح کا رقبہ 2464 مربع سم ہے۔

حل: $A = 4\pi r^2 = \text{گڑہ کی سطح کا رقبہ}$

$$4\pi r^2 = 2464 cm^2 \quad \text{یوں}$$

$$\text{یا } r^2 = \frac{2464}{4\pi}$$

$$= \frac{2464 \times 7}{4 \times 22}$$

$$r^2 = 196$$

$$\text{یا } r = 14 cm$$

$$\text{گڑہ کا حجم} = V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (14)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^3$$

$$= \frac{34496}{3}$$

$$= 11498.66 cm^3 \text{ (تقریباً)}$$

مشق 9.3

1- کڑوں کی سطح کے رقبے معلوم کریں جبکہ اُن کے رداس دیے ہوئے ہیں۔ $(\pi = \frac{22}{7})$ ۔

(i) $r = 3.5cm$

(ii) $r = 2.8m$

(iii) $0.21m$

2- رداس معلوم کریں جبکہ کڑوں کی سطح کا رقبہ دیا ہوا ہے۔

(i) $154m^2$

(ii) $231m^2$

(iii) $308m^2$

3- کڑہ کا حجم معلوم کریں جبکہ رداس r کی قیمت دی ہوئی ہے۔

(i) $5.8cm$

(ii) $8.7cm$

(iii) $7cm$

(iv) $3.4 m$

4- گڑوں کی سطحوں کا رقبہ دیا ہوا ہے۔ رداس اور حجم معلوم کریں۔

- (i) $201\frac{1}{7} \text{ cm}^2$ (ii) 2.464 cm^2 (iii) 616 m^2

5- ایک کروی ٹینک کا رداس 7.7 m ہے۔ اس میں کتنے لیٹر پانی آسکتا ہے؟ جبکہ $1000 \text{ cm}^3 = 1$ لیٹر ہے؟

6- اگر گڑہ A کا رداس گڑہ B کے رداس سے دوگنا ہو تو معلوم کریں:

(i) سطحوں کے رقبوں میں نسبت

(ii) حجموں میں نسبت

7- ایک گڑہ کی سطح کا رقبہ 576π مربع سم ہے۔ اس کا حجم بتائیے۔ اسے پگھلا کر 1 سم قطر کے کتنے گڑے بنائے جاسکتے ہیں۔

8- ایک ٹھوس کا پرکے گڑہ کو جس کا رداس 3 سم ہے کو پگھلا کر ایک تار بنائی گئی ہے جس کا قطر 0.4 سم ہے۔ تار کی لمبائی معلوم کریں۔

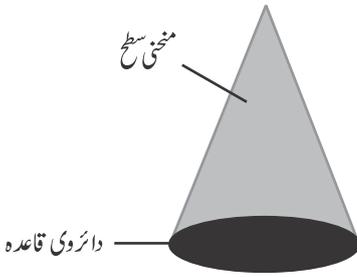
9.3.2 مخروط کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا

سامنے دی ہوئی شکل ایک مخروط مجسم ہے۔ اس مخروطی

ٹھوس کے دو حصے ہیں۔

(i) دائروی قاعدہ

(ii) منحنی سطح



مخروطی مجسم کے 15 اجزاء ہوتے ہیں جیسا کہ بائیں طرف دی ہوئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔

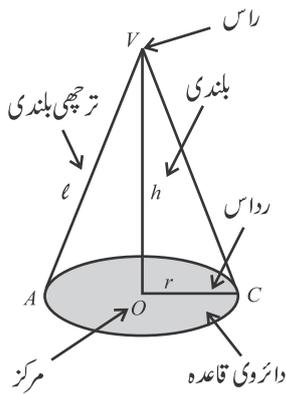
(i) راس (نقطہ V)

(ii) رداس (r) یعنی (\overline{OC})

(iii) ترچھی بلندی (l) یعنی (\overline{AV}) یا (\overline{CV})

(iv) بلندی (h) یعنی (\overline{OV})

(v) مرکز (نقطہ O)



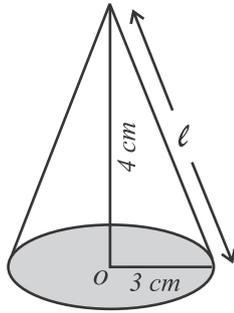
قطعہ خط جو نقطہ V کو نقطہ O سے ملاتا ہے رداسی قطعہ پر عمود ہوتا ہے۔

• مخروط کی سطح کارقبہ (Surface Area of a Cone)

ہم جانتے ہیں کہ دائرہ کی سطح کارقبہ πr^2 ہے۔ مخروط کی مٹھی سطح کارقبہ $\pi r \ell$ ہے۔

$$\begin{aligned} \text{یوں مٹھی سطح کارقبہ} + \text{قاعدہ کارقبہ} &= \text{مخروط کی کل سطح کارقبہ} \\ &= \pi r^2 + \pi r \ell \\ &= \pi r(r + \ell) \end{aligned}$$

مثال 5: ایک مخروط کے قاعدہ کا رداس 3 سم ہے اور بلندی 4 سم ہے۔ ترچھی بلندی معلوم کریں۔



حل: $\ell =$ مخروط کی ترچھی بلندی

$h =$ مخروط کی بلندی

$r =$ دائرہ کا رداس

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{h^2 + r^2} & \text{اب} \\ \ell &= \sqrt{3^2 + 4^2} & (h = 4\text{cm}, r = 3\text{cm}) \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ \ell &= 5\text{cm} \end{aligned}$$

مثال 6: مخروط کے قاعدہ کا رداس 6 سم ہے اور ترچھی بلندی 10 سم ہے۔ مخروط کی کل سطح کارقبہ معلوم کریں۔

حل: یہاں $\ell = 10\text{cm}$ ، $r = 6\text{cm}$

$$\begin{aligned} \text{مخروط کی کل سطح کارقبہ} &= \pi r(r + \ell) \\ &= \frac{22}{7} (6) (6 + 10) \\ &= \frac{22}{7} \times 6 \times 16 = \frac{22}{7} \times 96\text{cm}^2 \\ &= \frac{2112}{7} \text{cm}^2 = 301 \frac{5}{7} \text{cm}^2 \\ \text{کل رقبہ} &= 301 \frac{5}{7} \text{cm}^2 \end{aligned}$$

مثال 7: مخروط کے قاعدہ کا رقبہ $254 \frac{4}{7}$ مربع سم ہے۔ اس کی ترچھی بلندی 15 سم ہے۔ بلندی معلوم کریں۔

حل: یہاں $\pi r^2 = 254 \frac{4}{7}$ قاعدہ کا رقبہ

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} r^2 &= \frac{1782}{7} = \frac{1782}{7} \times \frac{7}{22} \\ r^2 &= 81\text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r &= 9\text{cm} \\
 \text{ترچھی بلندی} = \ell &= 15\text{cm} \\
 \text{بلندی} = h &= \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{(15)^2 - (9)^2} \\
 &= \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12\text{cm}
 \end{aligned}$$

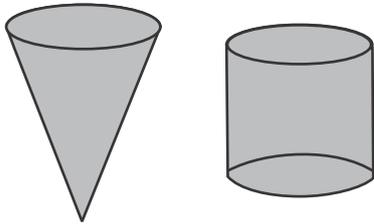
• مخروط کا حجم معلوم کرنا (Finding Volume of a Cone)
مخروط کا حجم معلوم کرنے کے لیے ایک سرگرمی کرتے ہیں۔

سامان:

- (i) ایک طرف کھلے منہ کا کھوکھلا بیلن (سلنڈر) جس کی بلندی h اور قاعدہ کا رداس r ہو۔
(ii) ایک کھوکھلا مخروط جس کی بلندی h اور قاعدہ کا رداس r ہو۔ (iii) ریت

سرگرمی:

- پہلا قدم: مخروط کو ریت سے بھرے اور بیلن میں ڈال دیجیے۔
دوسرا قدم: مخروط کو دوبارہ ریت سے بھرے اور بیلن میں ڈال دیجیے۔
تیسرا قدم: مخروط کو ایک دفعہ پھر ریت سے بھرے اور بیلن میں ڈال دیجیے۔
نتیجہ: تین دفعہ ریت ڈالنے سے بیلن مکمل طور پر بھر گئی۔



یعنی بیلن کا حجم = (مخروط کا حجم) $\times 3$

$$3 \times (\text{مخروط کا حجم}) = \pi r^2 h$$

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} (\pi r^2) (h)$$

$$= \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{مخروط کی بلندی})$$

مثال 8: ایک مخروطی برتن جس کی بلندی 3.5 میٹر اور رداس 3 میٹر ہے میں کتنی ریت آسکتی ہے جبکہ ایک مکعب میٹر ریت کا وزن 100 کلوگرام ہے

حل: میٹر $(r) = 3$ ، میٹر $(h) = 3.5$ بلندی

$$\text{کلیہ: } \frac{1}{3} \pi r^2 h = \text{مخروطی برتن کا حجم}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^2 \times 3.5$$

$$= 22 \times 3 \times 0.5$$

$$= 33\text{m}^3$$

$$\text{کلوگرام } 100 = \text{ایک مکعب میٹر ریت کا وزن}$$

$$\text{کلوگرام } 3300 = 33 \times 100 = \text{33 مکعب میٹر ریت کا وزن}$$

مثال 9: ایک مخروطی ٹینٹ کی بلندی 5 میٹر اور قاعدہ کارداس 12 میٹر ہے۔

(i) اس ٹینٹ کی تیاری میں کتنا کینوس استعمال ہوا۔ (ii) اس کے اندر ہوا کا حجم معلوم کریں۔

حل: (i) کلیہ: $\pi r l =$ مخروط کی ترچھی سطح کا رقبہ

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{اب}$$

$$= \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ میٹر}$$

$$\text{ترچھی سطح کا رقبہ} = \pi r l = 3.14 \times 12 \times 13 \quad \text{اب}$$

$$= 489.84 m^2$$

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \dots\dots(ii)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times (12)^2 \times 5$$

$$= \frac{1}{3} (3.14)(12)(12)(5)$$

$$= 3.14 \times 4 \times 12 \times 5$$

$$= 3.14 \times 240$$

$$\text{ٹینٹ کے اندر ہوا کا حجم} = 753.60 m^3$$

مثال 10: ایک دھاتی مخروط کارداس 2.4 سم اور بلندی 9.6 سم ہے۔ اسے پگھلا کر ایک گڑہ میں تبدیل کیا گیا ہے۔ اس گڑہ کارداس معلوم کریں۔

حل: فرض کریں $V_1 =$ مخروط کا حجم

اور $V_2 =$ گڑہ کا حجم

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{اب}$$

$$r = 2.4 \text{ cm} \quad \text{یہاں}$$

$$h = 9.6 \text{ cm} \quad \text{اور}$$

$$R = \text{گڑہ کارداس} \quad \text{اب فرض کریں:}$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{تب}$$

$$V_2 = V_1 \quad \text{اور}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$4R^3 = r^2 h$$

$$R^3 = \frac{r^2 h}{4} = \frac{(2.4)^2 \times 9.6}{4}$$

$$R^3 = (2.4)^3$$

$$R = 2.4 \text{ cm} \quad \text{اس لیے}$$

مشق 9.4

1- مخروط کے نامعلوم اجزاء درج کریں جبکہ تمام لمبائیاں سینٹی میٹر میں دی ہوئی ہیں۔

نمبر شمار	r	h	ℓ	ترچھی سطح کا رقبہ	قاعدہ کا رقبہ	کل سطح کا رقبہ
(i)	—	8	10	—	—	—
(ii)	3	4	—	—	—	—
(iii)	9	—	25	—	—	—
(iv)	—	—	—	—	154 cm^2	374 cm^2

2- مخروط کا حجم معلوم کریں اگر:

(i) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$

(ii) $r = 7 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$

(iii) $r = 5 \text{ cm}$, $\ell = 7 \text{ cm}$

(iv) $h = 5 \text{ cm}$, $\ell = 8 \text{ cm}$

3- ایک مخروط شکل کا کپ آئس کریم سے بھرا ہوا ہے۔ اس میں آئس کریم کا حجم کتنا ہوگا؟ اگر اس کی بلندی 5 سم اور رداس 4 سم ہو۔

4- ایک ٹھوس مخروط کی سطح کا کل رقبہ کتنا ہوگا؟ اگر اس کی بلندی 4 سم اور رداس 3 سم ہو۔

5- ایک مخروط کے قاعدہ کا رقبہ 38.50 مربع سم ہے۔ اگر اس کی بلندی قاعدہ کے رداس سے تین گنا ہو تو اس کا حجم معلوم کریں۔

6- ایک مخروطی شکل کے ٹینٹ کی بلندی 8.4 میٹر ہے تو اس کے قاعدہ کا رداس 54 ڈیسی میٹر ہے۔ اس ٹینٹ میں کتنے سکاؤٹوں کو رکھا جاسکتا

ہے؟ جبکہ ہر ایک سکاؤٹ کو 5.832 مکعب میٹر ہوا کی ضرورت ہو۔

جائزہ مشق 9

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) قائمہ الزاویہ مثلث ABC کا $\angle C$ قائمہ ہے۔ اس صورت میں c کو کیا کہا جائے گا؟

(a) قاعدہ (b) وتر (c) عمود (d) راس

(ii) قائمہ الزاویہ مثلث ABC کا $\angle C$ قائمہ ہے۔ اور $\angle A$ قاعدہ پر کا ایک زاویہ ہے۔ اس صورت میں b کو کیا کہا جائے گا؟

(a) قاعدہ (b) وتر (c) عمود (d) راس

(iii) ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں $\angle C = 90^\circ$ اور $\angle A = m$ قاعدہ پر کا ایک زاویہ ہے۔ اس صورت میں a کو کیا کہا جائے گا؟

(a) قاعدہ (b) وتر (c) عمود (d) راس

- (iv) قائمہ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ کے متقابلہ ضلع کو کیا کہتے ہیں؟
 (a) عمود (b) قاعدہ (c) وتر (d) قائمہ زاویہ
- (v) قائمہ الزاویہ مثلث کا قاعدہ 3 سم اور عمود 6 سم ہے اس کا رقبہ کتنا ہوگا؟
 (a) 9 مربع سم (b) 16 مربع سم (c) 25 مربع سم (d) 64 مربع سم
- (vi) مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیرو کا کلیہ کیا ہے؟
 (a) $\sqrt{s(s-a)(s-b)}$ (b) $\sqrt{s(s-a)(s-c)}$
 (c) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (d) $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$

-2 درج ذیل کے مختصر جوابات لکھیں۔

- (i) مسئلہ فیثاغورث کو بیان کیجیے۔
 (ii) ہیرو کا کلیہ لکھیے۔
 (iii) کڑہ کی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ لکھیے۔
 (iv) مخروط کا حجم معلوم کرنے کا کلیہ لکھیے۔
- 3 (i) ایک کڑہ کا حجم معلوم کریں جبکہ اس کا رداس 3.2 سم ہو۔
 (ii) مخروط کا حجم معلوم کریں جبکہ رداس 3 سم اور بلندی 4 سم ہو۔
 (iii) ایک مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جبکہ اس کے اضلاع 4 سم، 5 سم اور 8 سم ہوں۔

خلاصہ

- قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
- مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ہیرو کلیہ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ہے جبکہ a, b, c اس کے اضلاع ہیں اور $s = \frac{a+b+c}{2}$
- اگر کڑہ کا رداس r ہو تو اس کی سطح کا رقبہ $4\pi r^2$ ہے۔
- اگر کڑہ کا رداس r ہو تو اس کا حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$ ہے۔
- (عمودی بلندی) (قاعدہ کا رقبہ) $= \frac{1}{3}$ مخروط کا حجم
 $= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- اثباتی جیومیٹری کی تعریف کر سکیں۔
- استدلال کی بنیادیں بیان کر سکیں۔
- بنیادی مفروضوں کی اقسام اصول متعارفہ (Axioms) اور اصول موضوعہ (Postulates) بیان کر سکیں۔
- مسئلہ کے حصے بتا سکیں۔
- جیومیٹری میں مسئلہ (Theorem)، نتیجہ صریح (Corollary) اور عکس مسئلہ (Converse of a theorem) کا مطلب بیان کر سکیں۔
- درج ذیل مسائل اور نتائج صریح کو ثابت کر سکیں اور ان کے متعلقہ سوالات پر ان کا اطلاق کر سکیں۔
 - اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر واقع ہو تو اس طرح جو دو متصل زاویے پیدا ہوتے ہیں ان کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوتا ہے
 - اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویے ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک ہی خط مستقیم میں ہوں گے۔
 - اگر دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کریں تو اسی متقابلہ زاویے متماثل ہوں گے۔
 - اگر کسی مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان اضلاع کے متقابلہ زاویے بھی باہم متماثل ہوں گے۔
 - مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

10.1 اثباتی جیومیٹری کی تعریف (Define Demonstrative Geometry)

اثباتی جیومیٹری ریاضی کی ایک ایسی شاخ ہے جس میں جیومیٹری کے مسائل کا حل منطقی استدلال سے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس میں جیومیٹری کی اشکال سے مدد لی جاتی ہے۔ جس میں ریاضی کے مسائل کی سچائی کو ثابت کیا جاتا ہے۔

10.1.1 استدلال کی بنیادیں (Basics of Reasoning)

ریاضی میں استدلال کی بنیادیں یہ ہیں:

- بنیادی تصورات (Basic Concepts)
- بعض ایسے تصورات ہیں جنہیں تعریف کے بغیر قبول کر لیا جاتا ہے۔ مثلاً نقطہ، خط اور مستوی۔
- مفروضے (Assumptions)

کچھ بیانات کو بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ انہیں بنیادی مفروضے کہتے ہیں۔

10.1.2 مفروضوں کی اقسام (Types of Assumptions)

- اصول متعارفہ (Axioms)

اصول متعارفہ ریاضی کی تقریباً تمام شاخوں میں مشترک ہوتا ہے۔ اسے بغیر ثبوت کے تسلیم کیا جاتا ہے۔

اصول متعارفہ کی مثالیں

- (i) کل ہمیشہ جزو سے بڑا ہوتا ہے یا جزو کبھی کل کے برابر نہیں ہوتا۔
- (ii) اشیاء جو ایک ہی چیز کے برابر ہوں آپس میں بھی برابر ہوتی ہیں۔
- (iii) اگر برابر میں سے برابر تفریق کیے جائیں تو فرق بھی برابر ہوتے ہیں۔
- (iv) برابر کے دو گنے اور ان کے نصف آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

- اصول موضوعہ (Postulates)

یہ ایسے مفروضے ہوتے ہیں جنہیں ابتداء میں ہی صحیح تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ اور ان کا تعلق ریاضی کی کسی مخصوص شاخ سے ہوتا ہے۔

اصول موضوعہ کی مثالیں

- ایک ہی مستوی میں ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک قطعہ خط کھینچا جاتا ہے۔
- ایک قطعہ خط کو دوسری طرف لامتناہی طور پر بڑھا جا سکتا ہے۔
- ہم ایک خط مستقیم کو بڑھا کر یا ویسے ہی مطلوبہ لمبائی کا قطعہ خط کاٹ سکتے ہیں۔
- کسی زاویہ کی مقدار کا انحصار اس کے بازوؤں کی لمبائی پر نہیں ہوتا۔

10.1.3 مسئلہ کے اجزاء (Parts of Propositions)

مسئلہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جو درست یا غلط بھی ہو سکتا ہے۔ مسئلہ کے اجزاء کا ذکر نیچے کیا جاتا ہے۔

(i) بیان مسئلہ (Enunciation)

یہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جو جیومیٹری کی کسی سچائی کے متعلق ہوتا ہے اور جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

(ii) معلوم (Given)

آسانی اور وضاحت کے لیے سب سے پہلے ہم اُس کو لکھ لیتے ہیں جو کچھ دیا ہوا ہوتا ہے یا جو کچھ فرض کر لیا گیا ہوتا ہے۔

(iii) مطلوب (To Prove)

اس حصہ میں وہ کچھ لکھا جاتا ہے جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

(iv) عمل (Construction)

اس حصہ میں شکل میں اضافہ کیا جاتا ہے تاکہ ثبوت دینے میں آسانی ہو۔

(v) ثبوت (Proof)

اس حصہ میں استدلال کے ساتھ سچائی کو ثابت کیا جاتا ہے۔

10.1.4 ہندسی مسئلہ، نتیجہ صریح اور عکس مسئلہ کا مطلب بیان کرنا

ہندسی مسئلہ:

ہندسی مسئلہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جسے سچائی، استدلال اور ہندسی اشکال کی مدد سے ثابت کیا جاتا ہے۔

مسئلہ کی مثالیں:

(i) کسی بھی مثلث کے اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

(ii) اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو اُن کے متقابلہ اضلاع بھی آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح (Corollary)

نتیجہ صریح بھی ایک مسئلہ ہی ہوتا ہے جو ثابت کیے گئے مسئلہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ مثلاً مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع

متماثل ہوں تو اُن کے متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اور نتیجہ صریح یہ ہے کہ مساوی الاضلاع مثلث کے زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

عکس مسئلہ (Converse of Theorem)

اگر کسی مسئلہ کے معلوم کو مطلوب اور مطلوب کو معلوم میں بدل دیا جائے تو نئے مسئلہ کو پہلے مسئلہ کا عکس مسئلہ کہتے ہیں۔

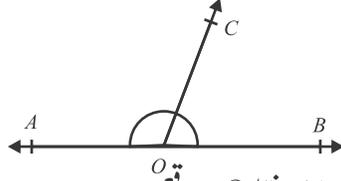
مثلاً مسئلہ فیثاغورث کا عکس مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کے مربع کے برابر ہو تو

مثلث قائمہ الزاویہ ہوگی۔

10.2 مسائل (Theorems)

10.2.1 درج ذیل مسائل کو بمعہ نتائج صریح ثابت کریں اور متعلقہ سوالات میں ان کا استعمال کیجیے۔

مسئلہ 1: اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر واقع ہو تو اس طرح جو دو متصل زاویے بنتے ہیں ان کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: AB ایک خط مستقیم ہے اور \vec{OC} اس خط پر نقطہ O پر واقع ہے۔

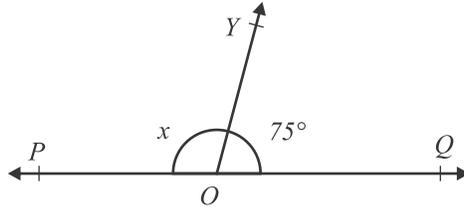
$$m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ \text{ مطلوب}$$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOC + m\angle BOC = m\angle AOB$ ---- (i)	زاویوں کی جمع کا موضوع
$m\angle AOB = 180^\circ$ ---- (ii)	زاویہ مستقیم
$m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	(i) اور (ii) سے

نتیجہ صریح: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس طرح سے بننے والے چار زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ چار قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1: درج ذیل شکل میں x کی قیمت معلوم کریں۔

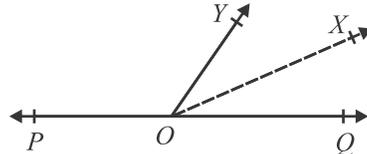


$$\text{حل: } m\angle POY + m\angle QOY = x + 75^\circ = 180^\circ \text{ (مسئلہ نمبر 1 کی رو سے)}$$

$$x = 180^\circ - 75^\circ$$

$$= 105^\circ$$

مسئلہ 2: اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک خط مستقیم میں ہوں گے۔



معلوم: $\angle POY$ اور $\angle QOY$ متصل زاویے ہیں۔

$$\text{نیز } m\angle POY + m\angle QOY = 180^\circ$$

مطلوب: \vec{OP} اور \vec{OQ} ایک ہی سیدھ میں ہیں۔ یعنی \vec{POQ} ایک خط مستقیم ہے۔

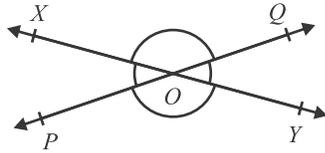
عمل: فرض کریں اگر \vec{OQ} اور \vec{OP} ایک سیدھ میں نہیں تو \vec{OX} لیں کہ \vec{OP} اور \vec{OX} ایک سیدھ میں ہوں یعنی \vec{POX} ایک خط مستقیم ہے۔
ثبوت:

بیانات	دلائل
\vec{POX} ایک خط مستقیم ہے اس لیے $m \angle POY + m \angle YOX = 180^\circ$ ---- (i) لیکن $m \angle POY + m \angle QOY = 180^\circ$ ---- (ii) یوں $m \angle POY + m \angle YOX = m \angle POY + m \angle QOY$ $m \angle YOX = m \angle QOY$ ---- (iii) یہ ناممکن ہے پس ہمارا عمل (مفروضہ) غلط ہوا ---- (iv) یوں \vec{POQ} ایک خط مستقیم ہے۔ اس طرح \vec{OQ} اور \vec{OP} ایک سیدھ میں ہوئے۔	عمل متصلہ سپلیمنٹری زاویے معلوم (i) اور (ii) سے دونوں طرف سے $m \angle POY$ تفریق کرنے سے کل جزو کے برابر نہیں ہوتا

نتیجہ صریح 1: اگر دو خطوط قطع کریں تو اس طرح بننے والے چار زاویوں کا مجموعہ چار قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح 2: اگر چند خطوط ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کریں تو اس طرح بننے والے تمام زاویوں کا مجموعہ چار قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ 3: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو اسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

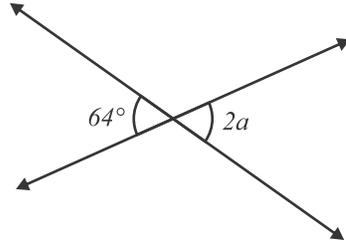


معلوم: \vec{PQ} اور \vec{XY} ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: $\angle XOQ \cong \angle YOP$
 $\angle YOQ \cong \angle XOP$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m \angle XOQ + m \angle QOY = 180^\circ$ ---- (i) $m \angle QOY + m \angle YOP = 180^\circ$ ---- (ii) $m \angle XOQ + m \angle QOY = m \angle QOY + m \angle YOP$ $m \angle XOQ = m \angle YOP$ پس $\angle XOQ \cong \angle YOP$ یعنی $\angle YOQ \cong \angle XOP$ اسی طرح	\vec{XY} ایک خط مستقیم ہے۔ \vec{PQ} ایک خط مستقیم ہے۔ (i) اور (ii) سے دونوں اطراف سے $m \angle QOY$ تفریق کیا



مثال 2: دی ہوئی شکل میں a کی قیمت معلوم کریں۔

حل: (اسی متقابلہ زاویے) $2a = 64^\circ$

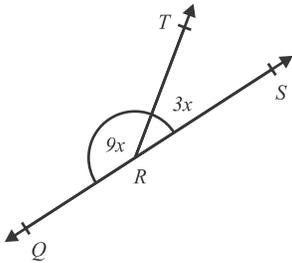
$$a = \frac{64^\circ}{2}$$

پس $a = 32^\circ$

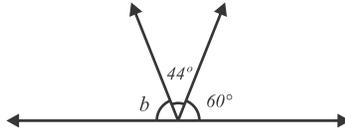
مشق 10.1

1- زاویوں کی مقداریں معلوم کریں جنہیں حروف تہجی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

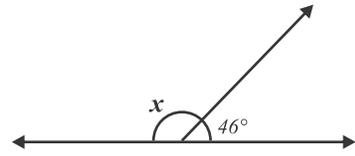
(iii)



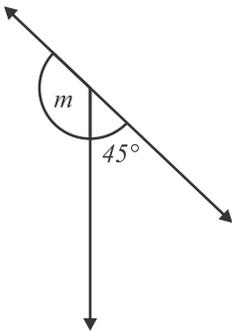
(ii)



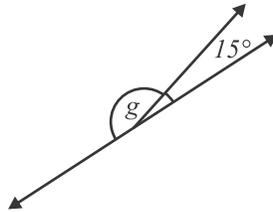
(i)



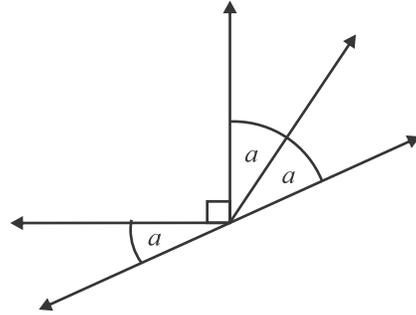
(vi)



(v)



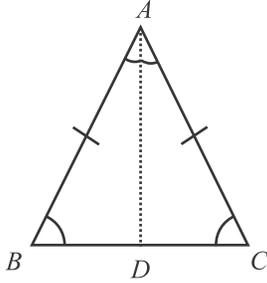
(iv)



2- اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر قائمہ زاویہ بنا رہا ہو تو ثابت کیجیے کہ دوسرا زاویہ بھی قائمہ زاویہ ہوگا۔

3- تین خطوط ایک ہی نقطہ میں سے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور 6 متماثل زاویے بناتے ہیں۔ ہر ایک زاویہ کی مقدار قائمہ زاویہ اور ڈگری میں معلوم کیجیے۔

مسئلہ 4: اگر ایک مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: $\triangle ABC$ میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مطلوب: $\angle B \cong \angle C$

عمل: زاویہ A کا ناصف لیا جو \overline{BC} کو نقطہ D پر ملتا ہے۔

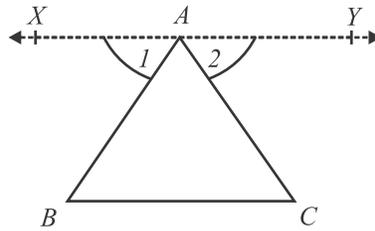
ثبوت:

بیانات	دلائل
$\triangle ABD \leftrightarrow \triangle ACD$	
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	معلوم
$\angle BAD \cong \angle CAD$	عمل
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	مشترک
$\triangle ABD \cong \triangle ACD$	ض-ز-ض \cong ض-ز-ض
$\angle B \cong \angle C$	پس یوں
	متماثل مثلثان کے متناظرہ زاویے

نتیجہ صریح: ایک مساوی الاضلاع مثلث کے تمام زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح: مساوی الساقین مثلث کے زاویہ راس کا ناصف اُس کے قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

مسئلہ 5: مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔



معلوم: ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب: $m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = m\angle 180^\circ$

عمل: نقطہ A میں سے گزرتا ہوا خط \overrightarrow{XAY} متوازی \overline{BC} لیں۔

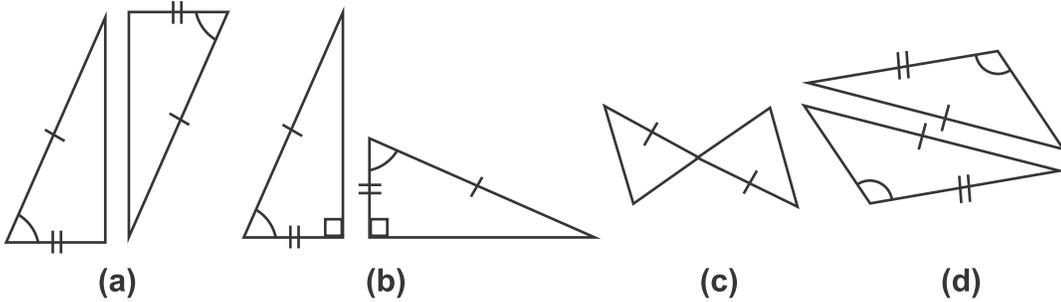
ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle B = m\angle 1$ ----- (i)	متبادلہ زاویے $(\vec{XY} \parallel BC)$
$m\angle C = m\angle 2$ ----- (ii)	متبادلہ زاویے $(\vec{XY} \parallel BC)$
$m\angle B + m\angle C = m\angle 1 + m\angle 2$	(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے
$m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = m\angle BAC + m\angle 1 + m\angle 2$	دونوں طرف $m\angle BAC$ جمع کیا
$m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = (m\angle BAC + m\angle 1) + m\angle 2$	زاویوں کی جمع کا موضوع
$m\angle CAX + m\angle 2 = 180^\circ$	متصلہ سپلیمنٹری زاویے
$m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ پس	

نتیجہ صریح: (i) مساوی الاضلاع مثلث کے ہر ایک زاویہ کی مقدار 60° ہوتی ہے۔
(ii) قائمہ الزاویہ مثلث میں دونوں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

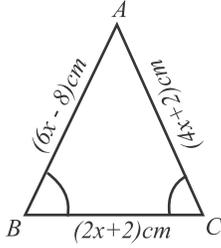
مشق 10.2

- 1- اگر $\Delta PQR \cong \Delta STU$ تو ان میں سے کون کون سے اضلاع اور زاویوں کی مقداروں کی پیمائشیں ایک جیسی ہیں؟
- 2- نیچے مثلثان کے جوڑے متماثل ہیں۔ کس مسئلہ کے اطلاق سے اشکال (a) سے (d) تک مثلثان متماثل ثابت کی جاسکتی ہیں؟



- 3- ایک متساوی الساقین مثلث میں قاعدہ پر زاویہ 45° کا ہے تو قاعدہ کے متقابلہ زاویہ کی مقدار کی پیمائش معلوم کیجیے۔

4- اگر دو زاویوں کے بازو آپس میں متوازی ہوں کہ وہ ایک ہی سمت میں ہوں یا مخالف سمت میں ہوں۔ تو ثابت کیجیے کہ وہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



5- اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔ $m\angle B = m\angle C$

جائزہ مشق 10

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ریاضی کی شاخ جس میں جیومیٹری کے اثباتی مسائل کو منطقی دلائل سے ثابت کیا جاتا ہے وہ کیا کہلاتی ہے؟

- (a) الجبرا (b) سیٹ تھیوری
(c) لوگارٹھم (d) اثباتی جیومیٹری

(ii) ایسے بیانات جنہیں بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیا جاتا ہے کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) بنیادی مفروضے (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) مسائل

(iii) ایک ایسا ابتدائی بیان ہے۔ جسے ہم فرض کر لیتے ہیں اور اس کے ثبوت کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس کو کیا کہا جاتا ہے؟

- (a) اصول موضوعہ (b) اثباتی مسئلہ
(c) نتیجہ صریح (d) مطلوب

(iv) ایک ایسی سچائی جس کو ثبوت کی ضرورت نہیں ہوتی اور اسے ہمیشہ درست تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ اس کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) نتیجہ صریح (b) اثباتی مسئلہ
(c) مسائل (d) اصول متعارفہ

(v) استدلال کا آغاز کس سے کیا جاتا ہے؟

- (a) بنیادی مفروضوں (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) اصول متعارفہ

(vi) ایک دعویٰ جسے بغیر ثبوت کے درست تسلیم کیا جاتا ہے اس کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) بنیادی مفروضہ (b) اثباتی مسائل
(c) نتیجہ صریح (d) مسائل

(vii) ایک تجویز جسے ثبوت کے بغیر درست مان لیا جاتا ہے اور جس کا تعلق کسی خاص استفساری انداز کی کسی خاص قسم سے ہو کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) بنیادی مفروضے (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) اصول موضوعات

(viii) ایسے حقائق جن کا پہلے سے علم ہو یا جنہیں فرض کر لیا جائے اس کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) مقدمات (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) بنیادی مفروضے

(ix) ایک ایسا بیان جسے حسابی عوامل اور دلائل کی مدد سے درست ثابت کیا جاتا ہے کیا کہلاتا ہے؟

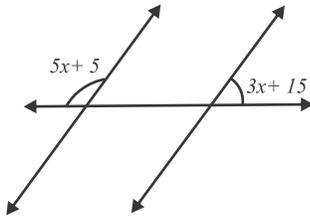
- (a) بنیادی مفروضہ (b) اثباتی مسئلہ
(c) نتیجہ صریح (d) مسائل

(x) ایسا اصول جسے اثباتی مسئلہ کی بنیاد پر حاصل کیا جاتا ہے کیا کہلاتا ہے؟

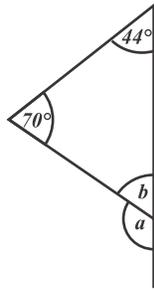
- (a) بنیادی مفروضہ (b) مسئلہ
(c) نتیجہ صریح (d) عالمگیر سچائی

-2 حروف سے ظاہر کیے گئے زاویوں کی مقدار میں معلوم کریں۔

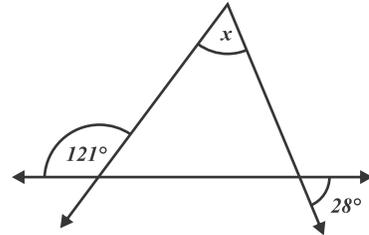
(i)



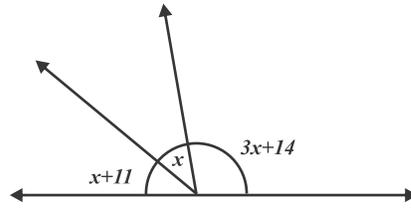
(iii)



(ii)



(iv)



-3 ثابت کیجیے۔

(i) اگر دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو اس طرح قطع کریں کہ چار متماثل زاویے بنیں تو ہر زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(ii) مساوی الساقین مثلث کے نقطہ راس سے عمود قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے۔

خلاصہ

- اثباتی جیومیٹری میں ہندسی اشکال کی مدد سے ریاضیاتی بیانات کی سچائی ثابت کی جاتی ہے۔
- اثباتی جیومیٹری ریاضی کی ایک ایسی شاخ ہے جس میں جیومیٹری کے مسائل کو منطقی استدلال سے ثابت کیا جاتا ہے۔
- ایسے بیانات کو جو بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیے جاتے ہیں بنیادی مفروضے کہلاتے ہیں۔
- اصول متعارفہ کی سچائی واضح ہوتی ہے اور انہیں بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیا جاتا ہے۔
- ایسا مفروضہ جس کا تعلق ریاضی کی متعلقہ شاخ سے ہو اور بغیر ثبوت کے درست تسلیم کیا جائے اصول موضوعہ کہلاتا ہے۔
- مسئلہ (proposition) ایک دعویٰ ہوتا ہے۔ جو درست یا غلط بھی ہو سکتا ہے۔
- بیان مسئلہ جیومیٹری کی سچائی کے متعلق ہوتا ہے۔ جسے ہم ثابت کرنے والے ہوتے ہیں۔
- معلوم: آسانی اور وضاحت کے لیے سب سے پہلے ہم اُس کو لکھ لیتے ہیں جو کچھ دیا ہوا ہوتا ہے یا جو کچھ فرض کر لیا گیا ہوتا ہے۔
- مطلوب: بیان مسئلہ میں ایک حصہ کو ثابت کرنا ہوتا ہے اُسے مطلوب کہتے ہیں۔
- عمل: مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے شکل میں مناسب اضافہ کیا جاتا ہے اسے عمل کہتے ہیں۔
- اثباتی مسئلہ: ایک ایسا بیان جس کی سچائی استدلال سے ثابت کی جاتی ہے کو اثباتی مسئلہ کہتے ہیں۔
- نتیجہ صریح: ایسے نتائج جو ہندسی مسائل سے اخذ کئے جائیں نتائج صریح کہلاتے ہیں۔
- اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر واقع ہو تو اس طرح سے جو دو متصل زاویے بنتے ہیں۔ اُن کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
- اگر کسی مسئلہ کے معلوم کو مطلوب اور مطلوب کو معلوم میں بدل دیا جائے تو نئے مسئلہ کو پہلے مسئلہ کا عکس مسئلہ کہتے ہیں۔
- مثلاً مسئلہ فیثاغورث کا عکس مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کے مربع کے برابر ہو تو مثلث قائمہ الزاویہ ہوگی۔
- اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوں۔ تو اُن کے بیرونی بازو ایک ہی خط مستقیم میں ہوں گے۔
- اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- اگر ایک مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو اُن کے متقابلہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔
- مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- تکوینیات کی تعریف کر سکیں۔
- کسی حادہ زاویہ کی تکویناتی نسبتوں کی تعریف کر سکیں۔
- 30° ، 60° اور 45° کے زاویوں کی تکویناتی نسبتیں معلوم کر سکیں۔

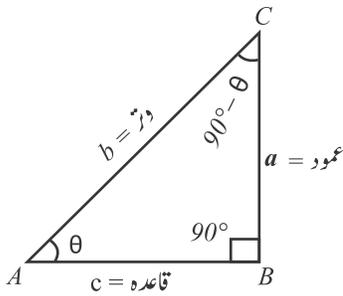
تکوینیات (Trigonometry)

11.1 تعارف (Introduction)

لفظ ٹرگنومیٹری یونانی (Greek) زبان سے اخذ کیا گیا ہے جس سے مراد مثلث کی پیمائش ہے۔ یہ ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے جو مثلثوں کے حل سے متعلق ہے۔ مثلثوں کے حل سے مراد مثلث کے اضلاع اور زاویوں کو معلوم کرنا ہے۔ تکوینیات کی ترقی میں مسلمان ریاضی دانوں خاص طور پر ابو عبد اللہ البطانی، البیرونی اور محمد بن موسیٰ الخوارزمی کے نام قابل ذکر ہیں۔

تکوینیات کا کاروبار، انجینئرنگ، ہروے، جہاز رانی، اجرام فلکی کے علم، طبعی اور سماجی علوم میں بہت اہم کردار ہے۔

11.2 حادہ زاویہ کی تکوینیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of an Acute Angle)



ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں (تھیٹا) $\theta = \angle CAB$ اور

$m\angle ABC = 90^\circ$ ہے 90° کے سامنے والے ضلع کو ہمیشہ وتر کہتے ہیں۔

زاویہ θ کے سامنے والے ضلع کو عمود کہتے ہیں اور دیے ہوئے زاویہ θ

اور 90° کے درمیان والے ضلع کو قاعدہ کہتے ہیں۔

دی ہوئی قائمہ الزاویہ مثلث ABC کے لیے θ کے لحاظ سے نسبتوں کی

یوں تعریف کی جاتی ہے۔

$$\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{a}{b} = \text{sine } \theta = \sin \theta$$

$$\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{c}{b} = \text{cosine } \theta = \cos \theta$$

$$\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{a}{c} = \text{tangent } \theta = \tan \theta$$

ان نسبتوں کی معکوس:

$$\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{b}{a} = \text{cosecant } \theta = \text{cosec } \theta$$

$$\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{b}{c} = \text{secant } \theta = \text{sec } \theta$$

$$\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{c}{a} = \text{cotangent } \theta = \text{cot } \theta$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

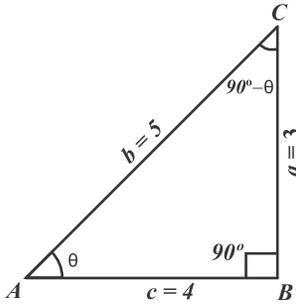
$$(i) \quad \text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$(ii) \quad \text{sec } \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$(iii) \quad \text{cot } \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$(iv) \quad \text{tan } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

مثال 1: دی ہوئی مثلث ABC میں $\theta = \angle A$ ، اضلاع a ، b اور c کی پیمائشیں شکل میں دی گئی ہیں۔ تکوینیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کریں۔



$$\sin \theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \quad \text{cosec } \theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{3} \quad \text{حل:}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}, \quad \text{sec } \theta = \frac{b}{c} = \frac{5}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{c} = \frac{3}{4}, \quad \text{cot } \theta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$$

مثال 2: اوپر والی مثال کی تکوینیاتی نسبتوں کی قیمتیں استعمال کر کے پڑتال کریں کہ:

i. $\sin \theta \times \text{cosec } \theta = 1$ ii. $\tan \theta \times \text{cot } \theta = 1$ iii. $\cos \theta \times \text{sec } \theta = 1$

حل:

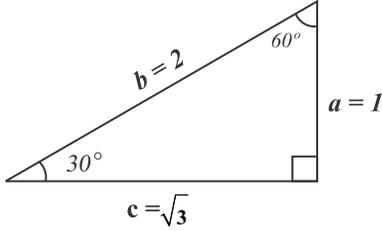
i. L.H.S = $\sin \theta \times \text{cosec } \theta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1 = \text{R.H.S}$

ii. L.H.S = $\tan \theta \times \text{cot } \theta = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1 = \text{R.H.S}$

iii. L.H.S = $\cos \theta \times \text{sec } \theta = \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1 = \text{R.H.S}$

11.2.1 حادہ زاویوں 30° ، 60° اور 45° کی تکونياتی نسبتیں

• 30° زاویہ کی تکونياتی نسبتیں:



دی ہوئی قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^\circ$ اور

$m\angle BAC = 30^\circ$ - بنیادی جیومیٹری سے ہم جانتے ہیں کہ قائمہ الزاویہ مثلث میں ہمیشہ 30° کے زاویے کے سامنے والے ضلع کی لمبائی وتر کی لمبائی سے نصف ہوتی ہے۔ اگر $a = 1$ تو $b = 2$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$

(قیمتیں درج کرنے سے) $|\overline{AB}|^2 + (1)^2 = (2)^2$

$|\overline{AB}|^2 = 4 - 1 = 3$

$|\overline{AB}| = \sqrt{3}$

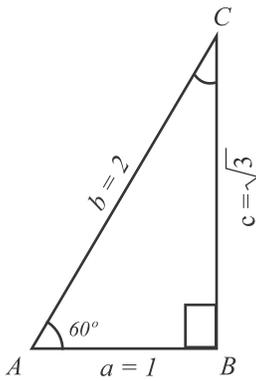
30° زاویہ کی تکونياتی نسبتیں ہوں گی:

$\sin 30^\circ = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$\cos 30^\circ = \frac{m \overline{AB}}{m \overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30^\circ = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

• 60° زاویہ کی تکونياتی نسبتیں:



دی ہوئی قائمہ الزاویہ مثلث میں $m\angle B = 90^\circ$ ،

$m\angle BAC = 60^\circ$ اور $m\angle ACB = 30^\circ$ ہے۔ بنیادی جیومیٹری سے ہم جانتے ہیں کہ ضلع \overline{AB} کی لمبائی وتر کی لمبائی سے نصف ہے اگر $m\overline{AB} = 1$ تو $m\overline{AC} = 2$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$

(قیمتیں درج کرنے سے) $(1)^2 + |\overline{BC}|^2 = (2)^2$

$$|\overline{BC}|^2 = 4 - 1 = 3$$

$$|\overline{BC}| =$$

60° زاویہ کی تکوئیاتی نسبتیں ہوں گی:

$$\sin 60^\circ = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{m \overline{AB}}{m \overline{AC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec 60^\circ = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AB}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

• 45° زاویہ کی تکوئیاتی نسبتیں:

دی ہوئی قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^\circ$ اور

$m\angle A = \theta = 45^\circ$ چونکہ $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ ، اس

لیے $m\angle A = m\angle C = 45^\circ$

∴ مثلث ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے پھر بنیادی جیومیٹری

سے $a = c = 1$

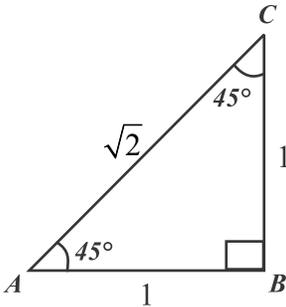
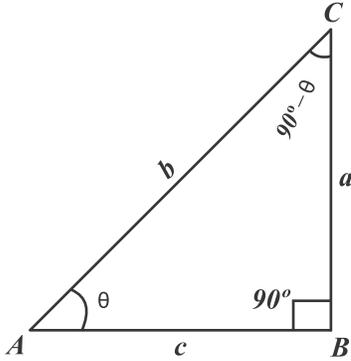
$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$$

$$= 1 + 1$$

$$b^2 = 2$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2}$$

اس لیے 45° کی تکوئیاتی نسبتوں کی قیمتیں ہوں گی:



$$\sin 45^\circ = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{BC}} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{m \overline{AB}}{m \overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec 45^\circ = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AB}} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AB}} = 1 \quad ; \quad \cot 45^\circ = \frac{m \overline{AB}}{m \overline{BC}} = 1$$

30°، 45° اور 60° کے زاویوں کی تکویناتی نسبتیں نیچے ایک ٹیبل میں دی گئی ہیں:

زاویہ نسبت	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

مثال 3: مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

- $\sin 45^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ$
- $\sin 60^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 30^\circ$
- $\sin 60^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ$
- $\cos 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ$

حل:

i. $\sin 45^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

iii. $\sin 60^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ii. $\sin 60^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

iv. $\cos 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ$

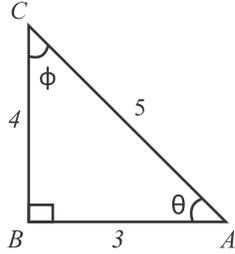
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

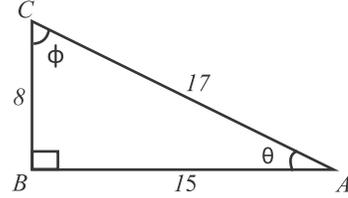
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مشق 11.1

1- مندرجہ ذیل قائمہ الزاویہ مثلثوں کے لیے تکوینیاتی نسبتیں معلوم کریں۔



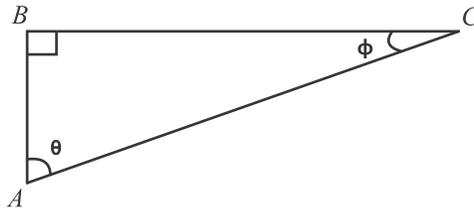
(a)



(b)

- (i) $\sin\theta$ (ii) $\cos\theta$ (iii) $\tan\theta$ (iv) $\sec\theta$ (v) $\operatorname{cosec}\theta$
 (vi) $\cot\theta$ (vii) $\tan\theta$ (viii) $\sin\theta$ (ix) $\sec\theta$ (x) $\cos\theta$

2- نیچے دی گئی مثلث ABC کی تکوینیاتی نسبتیں معلوم کریں۔



- (i) $\sin m\angle A$ (ii) $\cos m\angle A$ (iii) $\tan m\angle A$
 (iv) $\sin m\angle C$ (v) $\cos m\angle C$ (vi) $\tan m\angle C$

3- اگر ایک قائمہ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle C = 60^\circ$ ، $m\angle B = 90^\circ$ اور $\sin m\angle C = \frac{c}{b}$ تو مندرجہ ذیل تکوینیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

- (i) $\overline{BC} / \overline{AB}$ (ii) $\cos 60^\circ$ (iii) $\tan 60^\circ$ (iv) $\sec 60^\circ$
 (v) $\operatorname{cosec} 60^\circ$ (vi) $\cot 60^\circ$ (vii) $\sin 30^\circ$ (viii) $\cos 30^\circ$
 (ix) $\tan 30^\circ$ (x) $\sec 30^\circ$ (xi) $\operatorname{cosec} 30^\circ$ (xii) $\cot 30^\circ$

4- مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

- (i) $2\sin 60^\circ \cos 60^\circ$ (ii) $2\sin 45^\circ + 2\cos 45^\circ$
 (iii) $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ (iv) $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

جائزہ مشق 11

1- ہر بیان کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

- (a) 90° (b) 60° (c) 30° (d) 0° $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos ?$ (i)
- (a) 90° (b) 30° (c) 60° (d) 0° $\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \cot ?$ (ii)
- (a) cosec θ (b) sec θ (c) cot θ (d) tan θ $\sin \theta$ کا معکوس کیا ہے؟ (iii)
- (a) cosec θ (b) sec θ (c) cot θ (d) tan θ $\cos \theta$ کا معکوس کیا ہے؟ (iv)
- (a) cosec θ (b) sec θ (c) cot θ (d) tan θ $\tan \theta$ کا معکوس کیا ہے؟ (v)
- (a) cosec θ (b) sec θ (c) cot θ (d) tan θ $\sin 30^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟ (vi)
- (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0 $\cos 60^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟ (vii)
- (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0 $\sin 60^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟ (viii)
- (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0 $\sin 90^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟ (ix)
- (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0 $\tan 45^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟ (x)
- (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0 $\cos 45^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟ (xi)
- (a) 1 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 0

2- قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $2 \sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

(ii) $2 \cos 30^\circ \sin 30^\circ$

(iii) $2 \sin 45^\circ + 2 \cos 45^\circ$

(iv) $\tan 45^\circ \cos 45^\circ$

3- اگر 45° اور $\cos 45^\circ$ میں ہر ایک کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$

(ii) $3 \cos 45^\circ + 4 \sin 45^\circ$

(iii) $5 \cos 45^\circ - 3 \sin 45^\circ$

خلاصہ

- ٹرگنومیٹری تین الفاظ سے ماخذ ہے۔ (تین) Trei، (زاویے) Goni اور پیمانہ (Metron)۔
- تکوینیات مثلث کے عناصر کے تعلق کو واضح کرتی ہے۔ اور مثلث کے مختلف عناصر کو معلوم کرنے کے طریقوں پر مشتمل ہے۔
- تکوینیات میں تین، بہت عام تکوینیاتی نسبتیں sine، cosine اور tangent ہیں۔ تکوینیاتی نسبتیں صرف مثلث کے ایک ضلع سے دوسرے ضلع کی تقسیم ہے۔
- تکوینیاتی نسبتیں استعمال کی جاتی ہیں قائمہ الزاویہ مثلث کے زاویوں کا اس کے اضلاع کی لمبائیوں سے تعلق ہے۔

$$\sin \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{a}{b}$$

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- جماعتی تعدد اور تعددی تقسیم کی تعریف کر سکیں۔
- تعددی تقسیم کا جدول مرتب کر سکیں۔
- تعددی تقسیم کو کالمی نقشہ (Histogram) سے ظاہر کر سکیں۔
- مرکزی رجحان کے پیمانے بیان کر سکیں۔
- غیر گروہی مواد کی حسابی اوسط، اوزانی اوسط، وسطانیہ اور عادیہ معلوم کر سکیں۔
- اوسط، اوزانی اوسط، وسطانیہ اور عادیہ پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل کو حل کر سکیں۔

12.1 جماعتی تعدد اور تعددی تقسیم (Frequency and Frequency Distribution)

12.1.1 تعریفیں (Definitions)

• جماعتی تعدد

کسی مواد میں جتنی بار ایک قیمت دہرائی جائے اسے اس قیمت کا تعدد کہتے ہیں۔
مثال کے طور پر ایک جماعت کے 15 طلبہ نے 10 نمبروں میں سے مندرجہ ذیل نمبر حاصل کیے۔

3, 5, 7, 10, 7, 9, 3, 7, 5, 4, 6, 8, 7, 5, 2.

■ مواد 15 نمبروں پر مشتمل ہے۔

■ کچھ نمبر ایک سے زیادہ بار آئے ہیں یعنی 3, 5, 7.

■ 3 نمبر کا تعدد 2 ہے۔

■ 5 نمبر کا تعدد 3 ہے۔

■ 7 نمبر کا تعدد 4 ہے۔

■ باقی تمام نمبروں کا تعدد ایک ہے۔

• تعددی تقسیم

مواد کو ایک جدول کی صورت میں اس طرح لکھنا کہ ہر جماعت کے جماعتی تعدد کا فوراً مشاہدہ کیا جاسکے اسے تعددی تقسیم کہتے ہیں۔

12.1.2 تعددی تقسیم کے جدول کی بناوٹ (Construction of Frequency Distribution Table)

ایک سکول کے 50 طلبہ کا وزن کلوگرام میں اس طرح دیا گیا ہے۔

35, 30, 32, 36, 31, 40, 35, 42, 35, 45, 37, 41, 33, 37, 30, 28, 29,

30, 32, 33, 31, 35, 36, 30, 28, 37, 39, 28, 31, 34, 39, 45, 38, 36,

35, 28, 31, 34, 30, 41, 35, 36, 41, 28, 31, 34, 30, 29, 28, 37

ہم دیکھتے ہیں کہ طلبہ کے وزن کی سعت (Range) 28 کلوگرام سے 45 کلوگرام ہے۔ ہم مواد کو نیچے ایک جدول کی صورت

میں ترتیب دیتے ہیں۔

جماعتی وقفہ	تعدادات
28 - 30	14
31 - 33	9
34 - 36	13
37 - 39	7
40 - 42	5
43 - 45	2
کل تعداد	50

اوپر دیے ہوئے جدول میں طلبہ کے جماعتی وقفہ 28 کلوگرام سے 30 کلوگرام کا جماعتی تعدد 14 ہے اسی طرح دوسرے جماعتی تعدادات آسانی سے معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

- (i) سب سے بڑی قدر اور سب سے چھوٹی قدر تلاش کریں جو بالترتیب 45 کلوگرام اور 28 کلوگرام ہیں۔
(ii) جماعتوں کی تعداد 6 ہے۔
(iii) جماعتی وقفہ کا سائز معلوم کرنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{جماعتی وقفہ کا سائز} = \frac{\text{سب سے بڑی قدر} - \text{سب سے کم نمبر}}{\text{جماعتوں کی تعداد}}$$

$$= \frac{45 - 28}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\approx 2.8 \approx 3$$

مثال 1: 50 طلبہ کے 60 نمبروں کے ٹیسٹ میں سے حاصل کردہ نمبر نیچے دیے گئے ہیں۔

25, 33, 26, 34, 28, 35, 29, 36, 30, 54, 30, 39, 36, 37, 39, 40, 37, 34,
27, 41, 37, 41, 38, 42, 48, 51, 40, 51, 43, 40, 41, 39, 48, 51, 53, 41,
37, 52, 28, 46, 44, 37, 39, 52, 51, 40, 45, 46, 43, 53

6 جماعتوں کی تعددی تقسیم کا جدول مرتب کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} \text{سب سے کم نمبر} &= 25 \\ \text{سب سے زیادہ نمبر} &= 54 \\ \text{جماعتوں کی تعداد} &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{جماعت کا سائز} &= \frac{54 - 25}{6} \\ &= \frac{29}{6} \\ &= \text{تقریباً } 5 \end{aligned}$$

جماعتی وقفہ	ٹیپلی نشان	تعدادات
25 - 29		6
30 - 34		5
35 - 39		13
40 - 44		12
45 - 49		5
50 - 54		9
کل تعداد		50

مثال 2: 31 گھریلو بجلی کے یونٹوں کی استعمال شدہ تعداد نیچے درج کی گئی ہے۔ 10 جماعتوں کی تعددی تقسیم مرتب کریں۔

727, 773, 859, 711, 860, 747, 862, 738, 774, 852, 791, 836, 834
752, 828, 792, 908, 839, 752, 715, 880, 838, 852, 816, 751, 834,
818, 835, 831, 778, 837

حل:

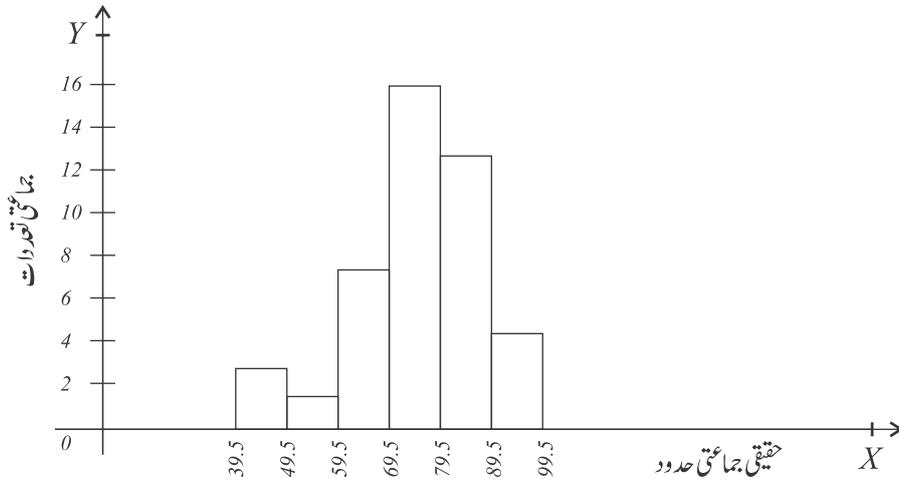
$$\begin{aligned} \text{سب سے زیادہ یونٹ} &= 908 \\ \text{سب سے کم یونٹ} &= 711 \\ \text{جماعتوں کی تعداد} &= 10 \\ \text{جماعتی وقفہ کا سائز} &= \frac{908 - 711}{10} \\ &= \frac{197}{10} = 19.7 \\ &\approx 20 \end{aligned}$$

جماعتی وقفہ	ٹیلی نشان	تعدادات
711 - 730		3
731 - 750		2
751 - 770		3
771 - 790		3
791 - 810		2
811 - 830		3
831 - 850		8
851 - 870		5
871 - 890		1
891 - 910		1
	کل تعداد	31

12.1.3 کالمی نقشہ کی بناوٹ (Construction of Histogram)

ہم پائی گراف اور بارگراف سے واقف ہیں۔ اس کے علاوہ مواد کو گراف سے ظاہر کرنے کے طریقہ کو کالمی نقشہ (Histogram) کہتے ہیں۔ کالمی نقشہ ایک بارگراف سے مشابہ ہوتا ہے۔ لیکن ہم اسے ایک جماعتی تعدد کے جدول کو ظاہر کرنے کے لیے بناتے ہیں۔

- کالمی نقشہ میں جماعتی قیمتوں کو افقی محور (X - محور) کے ساتھ لکھتے ہیں اور جماعتی تعددات کو Y - محور پر عمودی باروں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہر ایک جماعتی تعدد کے جدول میں برابر چوڑائی والی باروں کو استعمال کیا جاتا ہے۔
- گروہی مواد کو کالمی نقشہ سے ظاہر کرنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدامات کیے جاتے ہیں۔
- X - محور اور Y - محور کھینچیں۔
 - حقیقی جماعتی حدود کو X - محور کے ساتھ ظاہر کریں۔
 - جماعتی تعددات کو Y - محور کے ساتھ لکھیں۔
 - ہر جماعت کے لیے ایک بار (مستطیل) اس طرح بنائیں کہ سب کی چوڑائی جماعتی وقفہ کے متناسب ہو اور ہر بار کی اونچائی جماعتی تعدد کے متناسب سے ہو۔
- کالمی نقشہ (Histogram) کو نیچے دیا گیا ہے۔



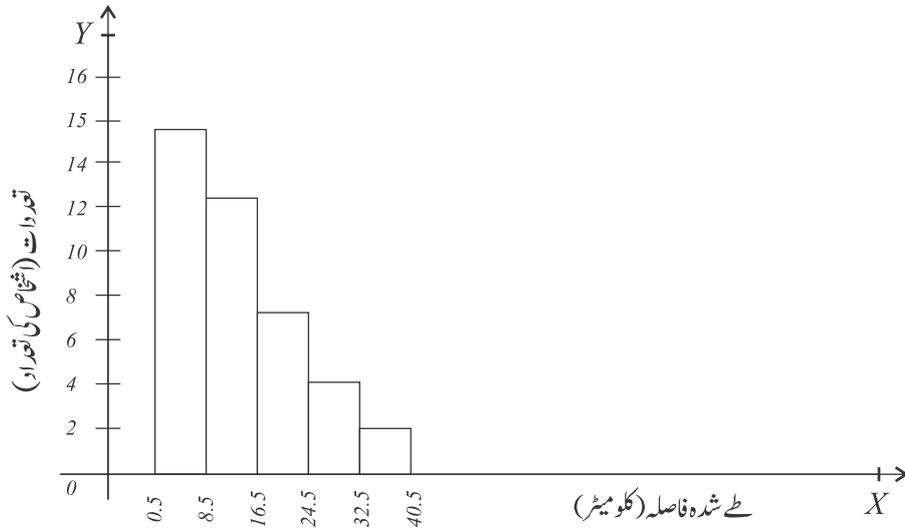
مثال 3: ایک علاقہ کے رہائشیوں کا روزانہ طے کردہ فاصلہ نیچے دیا گیا ہے۔ دیے گئے جماعتی تعدد کے جدول کا کالمی نقشہ بنائیے۔

طے کردہ فاصلہ (کلومیٹر میں)	1 - 8	9 - 16	17 - 24	25 - 32	33 - 40
اشخاص کی تعداد	15	12	7	4	2

حل: تعددی تقسیم کا جدول

جماعتی حدود	جماعتی تعددات	طے کردہ فاصلہ (کلو میٹر)
0.5 – 8.5	15	1 – 8
8.5 – 16.5	12	9 – 16
16.5 – 24.5	7	17 – 24
24.5 – 32.5	4	25 – 32
32.5 – 40.5	2	33 – 40
کل تعداد		40

کالمی نقشہ (Histogram)



مشق 12.1

1- مندرجہ ذیل مواد مختلف مالیت کے بانڈز کی رقم اندازی کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

35, 55, 64, 70, 99, 89, 87, 65, 67, 38, 62, 60, 70, 78, 69, 86, 39, 71, 56, 75,

51, 99, 68, 95, 86, 53, 59, 50, 47, 55, 81, 80, 98, 51, 63, 66, 79, 85, 83, 70

اوپر دیے ہوئے مواد کی تعددی تقسیم کا جدول بنائیں جبکہ جماعتی وقفہ 10 ہو اور ایک ہی سائز کی 7 جماعتیں ہوں۔

2- لاہور کے ایک قلیل آمدنی والے علاقے کے 50 گھریلو صارفین کے بجلی کے استعمال شدہ یونٹ کی تعداد نیچے دی گئی ہے۔

55, 45, 64, 130, 66, 155, 80, 102, 62, 60, 101, 58, 75, 81, 111, 90, 55, 151,
66, 139, 77, 99, 67, 51, 50, 125, 83, 55, 136, 91, 86, 54, 78, 100, 113, 93,
104, 111, 113, 96, 96, 87, 109, 94, 129, 99, 69, 83, 97, 97

ایک ہی سائز کی 12 جماعتوں میں اور 10 جماعتی وقفہ کے ساتھ جماعتی تعداد کا جدول بنائیں۔

3- ذیل میں ریاضی کے امتحان میں حاصل کردہ نمبروں کی لسٹ دی گئی ہے۔ اس مواد کی تعددی تقسیم بنائیں جبکہ شروع کی جماعت

44 - 40 ہو۔ جماعتی حدود اور حقیقی جماعتی حدود کو بھی درج کریں۔

63, 88, 79, 92, 86, 87, 83, 78, 40, 67, 68, 76, 46, 81, 92, 77, 84, 76, 70, 66,
77, 75, 98, 81, 82, 81, 87, 78, 70, 60, 94, 79, 52, 82, 77, 81, 77, 70, 74, 61

4- نیچے دیے ہوئے اعداد کی تعددی تقسیم بنائیں جس میں شروع کی جماعت 10-1 ہو۔ نیز جماعتی حدود بھی درج کریں۔

54, 67, 63, 64, 57, 56, 55, 53, 53, 54, 44, 45, 45, 46, 47, 37, 23, 34, 44, 27,
36, 45, 34, 36, 15, 23, 43, 16, 44, 34, 36, 35, 37, 24, 24, 14, 43, 37, 27, 36,
33, 25, 36, 26, 5, 44, 13, 33, 33, 17

5- ایک شہر میں 36 سیاحوں کے قیام کے دنوں کی تعداد نیچے دی گئی ہے۔

1, 6, 16, 21, 41, 21, 5, 31, 20, 27, 17, 10, 3, 32, 2, 48, 8, 12, 21, 44, 1, 36, 5,
12, 3, 13, 15, 10, 18, 3, 1, 11, 14, 12, 64, 10.

تعددی تقسیم بنائیں جبکہ شروع کی جماعت 7-1 ہو۔

6- سوالات 1 تا 5 کی تعددی تقسیم کو کالمی نقشہ سے ظاہر کریں۔

12.2 مرکزی رجحان کی پیمائش (Measures of Central Tendency)

ہم پڑھ چکے ہیں کہ مواد کو آسانی سے سمجھنے کے لیے مواد کو تعددی تقسیم کے جدول کی صورت میں ترتیب دیتے ہیں۔ کبھی مواد کا حجم زیادہ ہوتا ہے۔ اور اس کو سمجھنا، موازنہ کرنا اور تجزیہ کرنا مشکل ہو جاتا ہے۔ اس لیے اس بات کی ضرورت محسوس کی گئی کہ مواد کو موازنے کے قابل بنایا جائے تاکہ الجھن اور مشکل سے نجات حاصل ہو سکے۔

12.2.1 مرکزی رجحان کے پیمانوں کی تفصیل

مرکزی رجحان کے پیمانے حسابی اوسط، اوزانی اوسط، وسطانیہ اور عادیہ کے تصورات ہیں۔

12.2.2 مرکزی رجحان کی پیمائش معلوم کرنا

• اوسط (حسابی اوسط)

فرض کیا x_1, x_2, \dots, x_n دی ہوئی n مقداریں ہیں تو ان کی اوسط، ان مقداروں کے رجحان کی قیمت کو ظاہر کرے تو اسے اوسط قیمت یا اوسط کہتے ہیں۔

اس کو اس فارمولے سے حل کیا جاسکتا ہے۔

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\text{تمام قیمتوں کا مجموعہ}}{\text{قیمتوں کی تعداد}}$$

مثال 1: ایک طالب علم کے آٹھ پرچوں میں حاصل کردہ نمبر 58, 72, 65, 85, 94, 78, 87, 85 ہیں۔ ان کی اوسط معلوم کریں۔

$$\bar{X} = \frac{58 + 72 + 65 + 85 + 94 + 78 + 87 + 85}{8} \quad \text{حل:}$$

$$\bar{X} = \frac{624}{8}$$

$$= 78$$

پس اوسط 78 ہے

• اوزانی اوسط (Weighted Mean)

جب دیے ہوئے مواد کی تمام قیمتوں کی ایک ہی جیسی اہمیت ہو تو ہم اوسط کو استعمال کرتے ہیں لیکن جب مختلف قیمتوں کی مختلف اہمیت ہو تو یہ قیمتیں اوزان (weights) کہلاتی ہیں۔

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ کے اوزان $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ ہوں تو

$$\text{اوزانی اوسط (weighted mean)} = \bar{X}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n}$$

$$= \frac{\sum xw}{\sum w}$$

نوٹ: علامت \sum مجموعہ کو ظاہر کرتی ہے۔

مثال 2:

ایک طالب علم کے مختلف مضامین میں حاصل کردہ نمبر اور ان کی اہمیت (weights) دیے گئے ہیں۔

نمبر (x)	74	78	74	90
وزن (w)	4	3	5	6

اوزانی اوسط معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
 \text{اوزانی اوسط (Weighted Mean)} &= \bar{X}_w = \frac{4(74) + 3(78) + 5(74) + 6(90)}{4 + 3 + 5 + 6} \\
 &= \frac{296 + 234 + 370 + 540}{18} \\
 &= \frac{1440}{18} \\
 &= 80
 \end{aligned}$$

• وسطانیہ (Median)

اگر مواد کو صعودی یا نزولی ترتیب دی جائے تو مواد کا وسطانیہ:

(a) مواد کی درمیانی قیمت ہوگا۔ اگر مواد کی مدت طاق ہوں۔

(b) مواد کی دو درمیانی مدت کا اوسط ہوگا۔ اگر مواد کی مدت جفت ہوں۔

مثال 3:

9 طلبہ کے وزن کلوگرام میں نیچے دیے گئے ہیں۔ ان کا وسطانیہ معلوم کریں۔

33, 37, 35, 47, 30, 27, 45, 32, 29

حل:

ان مدت کو ترتیب نزولی میں لکھنے سے

$\overline{47, 45, 37, 35, 33, 32, 30, 29, 27}$

چونکہ مدت کی تعداد 9 یعنی طاق ہے۔ اس لیے وسطانیہ درمیانی قدر 33 ہوگا۔

پس کلوگرام 33 = وسطانیہ

• عادی (Mode)

عادی وہ قدر ہے جو مواد میں سب سے زیادہ بار آئے اگر مواد میں کوئی قدر ایک بار سے زیادہ نہ آئے تو اس مواد کا کوئی عادی نہیں ہوگا۔
اگر مواد میں دو یا دو سے زیادہ قدروں کی تعداد ایک جیسی ہو تو پھر ہر ایک قدر عادی ہوگی۔

مثال 4: دیے ہوئے مواد کا عادی معلوم کریں۔

1, 2, 5, 7, 8, 2, 2, 4, 3, 5, 7

حل: دیے ہوئے مواد میں 2 سب سے زیادہ بار آیا ہے۔ اس لیے اس مواد کا عادی 2 ہے۔

مثال 5: دیے ہوئے مواد کا عادی معلوم کریں۔

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20

حل: اس مواد میں کوئی عادی نہیں ہے کیونکہ کوئی مد بھی دوبارہ نہیں آئی۔

مثال 6: دیے ہوئے مواد کا عادی معلوم کریں۔

1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7

حل: چونکہ مواد میں 2 اور 5 تین تین بار آئے ہیں اس لیے اس مواد کے دو عادی یعنی 2 اور 5 ہیں۔

یاد رکھیں:

(i) ایک مواد میں ایک سے زیادہ عادی ہو سکتے ہیں۔

(ii) ایک مواد میں ایک عادی ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی

12.2.3 اوسط، اوزانی اوسط، وسطانیہ اور عادی پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل

مثال 7: آٹھویں جماعت کے 12 طلباء کا قد (سینٹی میٹر میں) نیچے دیا گیا ہے۔

148, 144, 145, 146, 148, 150, 145, 155, 151, 152, 145, 149

(i) ایک طالب علم کا اوسط قد معلوم کریں۔

(ii) سب سے زیادہ مشترک قد معلوم کریں۔

(iii) درمیانہ قد (وسطانیہ) معلوم کریں۔

حل: دیے ہوئے مواد کو ترتیب صعودی میں لکھیں۔

$$144, 145, 145, 145, 146, 148, 148, 149, 150, 151, 152, 155 \quad (i)$$

$$\text{اوسط قدر} = \frac{144 + 145 + 145 + 145 + 146 + 148 + 148 + 149 + 150 + 151 + 152 + 155}{12}$$

$$= \frac{1778}{12} = 148.16 \text{ سینٹی میٹر}$$

پس ایک طالب علم کا اوسط قدر 148.16 cm ہے۔

(ii) سب سے زیادہ بار آنے والی قدر 145 ہے جو تین بار آیا ہے۔

(iii) قدروں کی کل تعداد 12 ہے یعنی جفت ہے۔

اس لیے مطلوبہ وسطانیہ دو درمیانی قدروں کا اوسط ہوگا یعنی چھٹی قدر اور ساتویں قدر کا اوسط

$$\begin{aligned} \text{وسطانیہ} &= \frac{\text{ساتویں قدر} + \text{چھٹی قدر}}{2} \\ &= \frac{148 + 148}{2} \\ &= \frac{296}{2} = 148 \end{aligned}$$

پس وسطانیہ 148 ہے۔

مشق 12.2

1- مندرجہ ذیل مواد کا اوسط، وسطانیہ اور عاہ معلوم کریں۔

$$10, 8, 6, 0, 8, 3, 2, 5, 8, 4 \quad (i)$$

$$1, 3, 5, 3, 5, 3, 7, 5, 7, 5, 7 \quad (ii)$$

$$5, 4, 1, 4, 0, 3, 4, 119 \quad (iii)$$

$$62, 90, 71, 83, 75 \quad (iv)$$

$$45, 65, 80, 92, 80, 75, 56, 96, 62, 78 \quad (v)$$

(vi) ایک کتاب کے پہلے 20 الفاظ کے حروف کی تعداد

$$3, 2, 5, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 3, 5, 3, 4, 4, 5$$

(vii) 250 ملی لٹر 9 مختلف مشروبات کی بوتلوں میں کلوریز کی تعداد

$$99, 106, 101, 103, 108, 107, 107, 106, 108$$

(viii) ایک شہری علاقے کے 15 گھروں میں کمروں کی تعداد

5, 9, 8, 6, 8, 7, 6, 7, 9, 8, 7, 9, 7, 8, 5

(ix) 10 سکولوں کی لائبریریوں میں کتابوں کی تعداد (سینکڑوں میں)

78, 215, 35, 267, 39, 17, 418, 286, 335, 50

(x) 10 پرائیویٹ ہسپتالوں میں ایک مریض کا ایک دن کا خرچ (روپوں میں)

4125, 2500, 3115, 6580, 7150, 3750, 5920, 4575, 3225, 2500

2- ایک شخص نے مندرجہ ذیل غذائی اشیاء خریدیں۔

غذائی اشیاء	مقدار (کلوگرام میں)	قیمت فی کلوگرام (روپے میں)
چاول	10	96
آٹا	12	48
گھی	4	190
چینی	3	49
بکرے کا گوشت	2	650

غذائی اشیاء کی اوسط قیمت فی کلوگرام کیا ہے؟

3- 40 طلبہ کے اپنے سکول میں پہنچنے کا طے شدہ فاصلہ (کلو میٹر میں) دیا گیا ہے۔

2, 8, 1, 5, 9, 5, 14, 10, 31, 20, 15, 4, 10, 6, 5, 10, 5, 18, 12, 25, 30, 27, 20, 3,

9, 15, 15, 18, 10, 1, 1, 6, 25, 16, 7, 12, 1, 8, 21, 12.

طے شدہ فاصلہ کا اوسط، وسطانیہ اور عادیہ معلوم کریں۔

4- نیچے دیے ہوئے جدول میں 127 خاندانوں کا سائز دیا گیا ہے

خاندان کا سائز	2	3	4	5	6	7	8
تعدادات	51	31	27	12	4	1	1

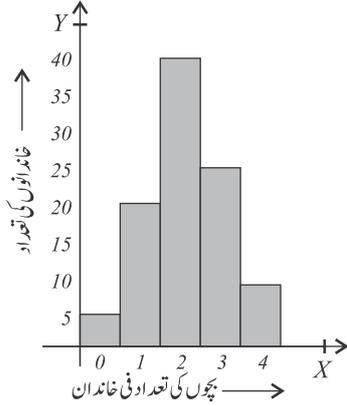
اوسط، وسطانیہ اور عادیہ معلوم کریں۔

5- نیچے دیے ہوئے جماعتی تعدد کے جدول کی اوسط اور جماعتی حدود معلوم کریں۔

جماعتی وقفہ	0 - 39	40 - 79	80 - 119	120 - 159	160 - 199
تعدادات	17	41	80	99	4

6- نیچے دیے ہوئے جماعتی تعدد کے جدول کی اوسط معلوم کریں۔

جماعتی وقفہ	1 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35	36 - 40
تعدادات	19	24	18	21	23	20	16	15



7- دی گئی شکل میں نمونے کے 100 خاندانوں کے بچوں کی تعداد فی خاندان ظاہر کی گئی ہے۔

- (a) بچوں کی ماڈل تعداد عادی خاندان بیان کریں۔
 (b) بچوں کی تعداد فی خاندان کی اوسط معلوم کریں۔
 (c) بچوں کی تعداد فی خاندان کا وسطانیہ معلوم کریں۔

جائزہ مشق 12

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

- (i) مواد 18, 30, _____, 14, 24 کا کون سا عدد چھوڑ دیا گیا ہے جبکہ اوسط 23 ہے۔
 (a) 28 (b) 29 (c) 30 (d) 31
- (ii) مواد 35, _____, 40, 28, 16, 18, 37, 20 کا کون سا عدد چھوڑ دیا گیا ہے جبکہ وسطانیہ 26 ہے۔
 (a) 20 (b) 22 (c) 24 (d) 28
- (iii) ایک عدد جو دیے گئے مواد میں سب سے زیادہ دفعہ آئے اسے کیا کہتے ہیں؟
 (a) جماعتی تعدد (b) عادی (c) وسطانیہ (d) اوسط
- (iv) دیے گئے مواد میں ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات کی اقدار کی ترتیب کیا کہلاتی ہے؟
 (a) تعدد (b) تعددی تقسیم (c) وسطانیہ (d) عادی
- (v) تعددی تقسیم کا ایسی مستطیلوں کے ذریعے اظہار جن کی چوڑائیاں جماعتی وقفوں کو ظاہر کریں اور جن کا رقبہ ان کے جماعتی تعدد کے متناسب ہو تو اسے کیا کہتے ہیں؟
 (a) واحد قدر کہلاتی ہے (b) زیادہ قدریں کہلاتی ہیں
 (c) تعددی قدریں کہلاتی ہیں (d) تکراری قدریں کہلاتی ہیں

(vi) مرکزی رجحان کی ایک پیمائش جو مواد کے مرکزی مقام کو بیان کرے کیا کہلاتی ہے؟

- (a) لائن گراف (b) بار گراف (c) پائی گراف (d) کالمی نقشہ

(vii) شماریاتی پیمانہ جو تمام مواد کی تقسیم کے نمائندہ کے طور پر ایک واحد قیمت کی پہچان کرتا ہے اسے کیا کہتے ہیں؟

- (a) مرکزی رجحان (b) اوسط (c) کالمی نقشہ (d) تعددی تقسیم

(viii) جب تمام مشاہدات کو ترتیب سے صعودی یا ترتیب سے نزولی میں لکھا جائے اور وہ قیمت جو درمیانی جگہ لیتی ہے اسے کیا کہتے ہیں؟

- (a) اوسط (b) عادی (c) وسطانیہ (d) تعددی تقسیم

(ix) وہ قیمت جو زیادہ مرتبہ مواد میں آتی ہے کیا کہلاتی ہے؟

- (a) اوسط (b) عادی (c) وسطانیہ (d) تعددی تقسیم

2- نیچے دیے ہوئے ہر ایک مواد کا اوسط، وسطانیہ اور عادی معلوم کریں۔

- (a) 3, 6, 3, 7, 4, 3, 9 (b) 11, 10, 12, 12, 9, 10, 14, 12, 9
(c) 2, 9, 7, 3, 5, 5, 6, 5, 4, 9 (d) 6, 8, 11, 5, 2, 9, 7, 8
(e) 153.8, 154.7, 156.9, 154.3, 152.3, 156.1, 152.3

3- ایک جماعت کے 20 طلبہ کے نمبر نیچے دیے گئے ہیں

93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 72, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

تعددی تقسیم کا جدول بنائیں نیز اس کا کالمی نقشہ بنائیں۔

4- پینے کے پانی کی 10 لٹر کی قیمت کئی اسٹورز پر ریکارڈ کی گئی اور نتائج مندرجہ ذیل جدول میں ظاہر کیے جاتے ہیں۔

تعدادات	قیمت (روپوں میں)
1	74
2	75
8	76
10	77
2	78
1	79
1	80

قیمت کی اوسط، وسطانیہ اور عادی معلوم کریں۔

خلاصہ

- تعدد ایک ایسا نمبر ہے جو بتاتا ہے کہ ایک قدر کتنی دفعہ آئی ہے۔
- مواد کو ایک جدول کی صورت میں اس طرح لکھنا کہ ہر جماعت کے جماعتی تعدد کا فوراً مشاہدہ کیا جاسکے اسے تعددی تقسیم کہتے ہیں۔
- تعددی تقسیم کا جدول ایک طریقہ ہے جس میں ہم مواد کو ترتیب دے سکتے ہیں تاکہ یہ مزید واضح ہو۔ ہم تعددی تقسیم کے جدول کو بنا سکتے ہیں جو کہ ہمارے مواد کی سادہ فہرست کی نسبت بہتر شکل دے۔
- کالمی نقشہ تعددی تقسیم کا ایسی مستطیلوں کے ذریعے اظہار ہے جن کی چوڑائی جماعتی وقفوں کو ظاہر کرتی ہے اور جن کا رقبہ ان کے متعلقہ جماعتی تعدد کے متناسب ہو۔
- مرکزی رجحان کا ایک پیمانہ واحد قیمت ہے جو مواد کے اندر درمیانی پوزیشن کی نشاندہی کرتی ہے۔
- مرکزی رجحان کی تعریف ”شاریاتی پیمائش“ جو تمام تقسیم کی قائم مقام ایک واحد قیمت کی نشاندہی کرتی ہے۔
- حسابی اوسط یا صرف اوسط سب سے مقبول اور معروف مرکزی رجحان کا پیمانہ ہے۔
- مواد میں دی گئی تمام قیمتوں کے مجموعہ کو مواد کی قیمتوں کی تعداد پر تقسیم کرنے کو اوسط کہا جاتا ہے۔

$$\text{اوسط} = \frac{\text{مواد کا مجموعہ}}{\text{مواد کی تعداد}}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \text{یا}$$

• اگر مواد کو صعودی یا نزولی ترتیب دی جائے تو مواد کا وسطانیہ:

(a) مواد کی درمیانی قیمت ہوگا۔ اگر مواد کی مدات طاق ہوں۔

(b) مواد کی دو درمیانی مدات کا اوسط ہوگا۔ اگر مواد کی مدات جفت ہوں۔

- عادیہ سے مراد وہ قیمت جو مواد میں سب سے زیادہ بار آئے۔ کسی مواد میں عادیہ نہیں بھی ہوتا کیونکہ اس مواد میں ہر قیمت صرف ایک دفعہ ہی ہوتی ہے۔



جوابات

مشق 1.1

1. (i) $\{\phi\}$ (ii) $\phi, \{1\}$ (iii) $\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$
2. (i) ϕ (ii) $\phi, \{0\}, \{1\}$ (iii) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
3. (i) $\{\phi, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$ (ii) $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

جائزہ مشق 1

1. (i) c (ii) d (iii) b (iv) c (v) c
(vi) c (vii) b (viii) d (ix) c
3. (i) سیٹ A کے تمام تحتی سیٹ = $\phi, \{e\}, \{f\}, \{g\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}, \{e, f, g\}$
سیٹ B کے تمام تحتی سیٹ = $\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$
- (ii) $\{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

مشق 2.1

1. (i) 0.714... , غیر مختتم (ii) 0.6 , مختتم (iii) 0.857... , غیر مختتم
(iv) 0.2857... , غیر مختتم (v) 0.375 , مختتم (vi) 1.6 , مختتم
2. (i) 0.428571 , متوالی (ii) 0.8 , کوئی نہیں (iii) 0.75 , کوئی نہیں
(iv) 0.916 , متوالی (v) 0.142857 , متوالی (vi) 0.8 , متوالی
(vii) 3.125 , کوئی نہیں (viii) 3.142857 , متوالی (ix) 3.25 , کوئی نہیں
(x) 3.5 , کوئی نہیں (xi) 14.5 , کوئی نہیں (xii) 3.3 , متوالی

مشق 2.2

1. (i) 49 (ii) 121 (iii) 361 (iv) 625 (v) 1369 (vi) 5625
2. (i) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
(ii) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
(iii) $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$
(iv) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
(v) $1 + 2 + 3 + 2 + 1$
(vi) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

مشق 2.3

1. (i) 28 (ii) 35 (iii) 53 (iv) 65 (v) 72
(vi) 88 (vii) 36 (viii) 42 (ix) 171
2. (i) 117 (ii) 171 (iii) 321 (iv) 647 (v) 223
(vi) 236 (vii) 490 (viii) 3214

مشق 2.4

1. (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{11}{25}$ (iii) $\frac{14}{21}$ (iv) $1\frac{1}{6}$ (v) $\frac{26}{27}$ (vi) $3\frac{3}{5}$
 2. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{13}{16}$ (iii) $\frac{28}{29}$ (iv) $\frac{32}{35}$ (v) $2\frac{3}{8}$ (vi) $3\frac{1}{11}$

مشق 2.5

1. (i) 1.1 (ii) 0.8 (iii) 2.7 (iv) 1.2 (v) 1.3 (vi) 3.5
 2. (i) 0.57 (ii) 0.72 (iii) 3.2 (iv) 4.53 (v) 25.47 (vi) 54.6
 (vii) 87.256 (viii) 0.0932 (ix) 48.73

مشق 2.6

1. (i) 1.414 (ii) 1.732 (iii) 2.236 (iv) 2.646 (v) 3.317 (vi) 3.873
 2. (i) 1.90 (ii) 2.53 (iii) 5.38 (iv) 7.96 (v) 28.57 (vi) 6.00

مشق 2.7

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 3 (iv) 3 (v) 3 (vi) 4 (vii) 4
 (viii) 4 (ix) 4 (x) 3 (xi) 4 (xii) 4

مشق 2.8

1. 120 میٹر 2. 2600 میٹر 3. 350 درخت 4. 464 میٹر 5. 14 ڈیسی میٹر 6. 120 میٹر , 240 میٹر
 7. 187 8. 28 میٹر 9. 350 میٹر 10. 1000 میٹر , 50,000 روپے

مشق 2.9

1. (i) , (iii) , (iv) , (v)
 2. (i) 9 (ii) 25 (iii) 24 3. (i) 2.744 (ii) 0.064 (iii) 0.512
 4. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 33 (iii) 15

جائزہ مشق 2

1. (i) c (ii) d (iii) c (iv) a (v) c (vi) a
 (vii) c (viii) c (ix) a (x) d (xi) a (xii) d
 2. (a) 3,647 (b) 4,5509 (c) 4,3214
 3. (a) $\frac{16}{3}$ (b) $\frac{71}{17}$ (c) $\frac{131}{13}$ (d) 0.231 (e) 0.452
 (f) 12.36 (g) 0.506 (h) 6.165 (i) 8.019
 4. 402 میٹر 5. 14 گولیاں 6. (a) 12 (b) 15 (c) $\frac{6}{5}$

مشق 3.1

1. (i) 5 (ii) 274 (iii) 110 (iv) 3598 (v) 1264 (vi) 724
 (vii) 73 (viii) 400

2. (i) $(10111101001)_2, (5721)_8, (44100)_5$ (ii) $(110111001)_2, (3231)_5$
 (iii) $(1000000110)_2, (13110)_5$ (iv) $(1101100011)_2, (11432)_5, (1543)_8$
 (v) $(1103)_5, (231)_8$

مشق 3.2

1. (i) $(1100)_2$ (ii) $(100011111110)_2$ (iii) $(1011)_2$
 (iv) $(101000)_2$ (v) $(110101100101)_2$ (vi) $(12232)_5$
 (vii) $(1120231)_5$ (viii) $(11124)_5$ (ix) $(2234230444)_5$
 (x) $(232041310)_5$ (xi) $(10307)_8$ (xii) $(1644)_8$
 (xiii) $(3066226)_8$ (xiv) $(1444371)_8$ (xv) 564
2. (i) $(101000010)_2, (2242)_5, (502)_8$ (ii) $(1001100000)_2, (4413)_5, (1140)_8$
 (iii) $(1101010)_2, (411)_5, (152)_8$ (iv) $(10010110001)_2, (14301)_5, (2261)_8$
 (v) $(1000111110011)_2, (120332)_5, (10563)_8$
 (vi) $(110001111101011)_2, (402104)_5, (30753)_8$
 (vii) $(111000011010000001010)_2, (433121310)_5, (7032012)_8$
 (viii) $(110101100001101000)_2, (24003430)_5, (654150)_8$
 (ix) $(1100000111000110100)_2, (11002431)_5, (1627064)_8$
 (x) $(10011001101111010011100)_2, (2242201344)_5, (23157234)_8$

جائزہ مشق 3

1. (i) d (ii) d (iii) b (iv) b (v) b (vi) a (vii) a
 3. (i) 5 (ii) 8 (iii) 253 (iv) 1726 (v) 169
 4. (i) $(1104)_5, (232)_8$ (ii) $(11240)_5, (1464)_8$ (iii) $(41030)_5, (5120)_8$
 (iv) $(3122410)_5, (144625)_8$ (v) $(12043)_5, (1602)_8$
 5. (i) $(11110)_2$ (ii) $(111110)_2$ (iii) $(1001)_2$
 6. (i) $(23312)_5$ (ii) $(3144)_5$ (iii) $(12040)_5$ (iv) $(13313)_5$
 7. (i) $(1075)_8$ (ii) $(2322)_8$ (iii) $(23114162)_8$ (iv) $(253715)_8$
 8. (i) 1160 (ii) 163 (iii) 218811

مشق 4.1

1. 32 دن 2. 36 کلوگرام 3. 18,864 روپے 4. 60,000 روپے 5. 112 آدمی
 6. 10 روپے 7. 240 معمار 8. 489 سوئٹر 9. 672 آدمی 10. 400 سائیکلیں

مشق 4.2

1. اسلم کا منافع: 31,500 روپے
 اکرم کا منافع: 35,000 روپے
 4. سعد کا نقصان: 3,000 روپے
 صعود کا نقصان: 4,500 روپے
 سعید کا نقصان: 6,000 روپے
 7. اسلم کا منافع: 1,400 روپے
 اکرم کا منافع: 120 روپے
 اصغر کا منافع: 100 روپے
2. آمنہ کا منافع: 3,600 روپے
 مریم کا منافع: 4,800 روپے
 5. اکرم کا منافع: 6,000 روپے
 اصغر کا منافع: 8,000 روپے
3. پہلے حصہ دار کا حصہ: 7,320 روپے
 دوسرے حصہ دار کا حصہ: 4,270 روپے
 6. A کا منافع: 3,000 روپے
 B کا منافع: 3,600 روپے
 C کا منافع: 5,400 روپے

مشق 4.3

1. بیٹے کا حصہ 48,000 روپے ، بیٹی کا حصہ 24,000 روپے
2. بیوہ کا حصہ 1,00,000 روپے ، بیٹے کا حصہ 2,80,000 روپے ، بیٹی کا حصہ 1,40,000 روپے
3. بیوہ کا حصہ 87,500 روپے ، بیٹے کا حصہ 1,22,500 روپے ، بیٹی کا حصہ 61,250 روپے
4. بیوہ کا حصہ 9,000 روپے ، بیٹے کا حصہ 42,000 روپے ، بیٹی کا حصہ 21,000 روپے
5. بیٹے کا حصہ 2,00,000 روپے ، بیٹی کا حصہ 1,00,000 روپے
6. بیوہ کا حصہ 75,000 روپے ، بیٹے کا حصہ 3,50,000 روپے ، بیٹی کا حصہ 1,75,000 روپے
7. بیٹے کا حصہ 40,000 روپے ، بیٹی کا حصہ 20,000 روپے
8. شوہر کا حصہ 45,000 روپے ، بیٹے کا حصہ 67,500 روپے ، بیٹی کا حصہ 33,750 روپے

مشق 4.4

1. 701.40 ڈالر
2. 445.10 پاؤنڈ
3. 1862.20 سعودی ریال
4. 30,000 بھارتی روپے
5. 377.28 آسٹریلین ڈالر
6. 5028.28 چینی یں
7. 543.48 کینیڈین ڈالر
8. 1505.38 ترکی لیرا

مشق 4.5

1. 4,800 روپے
2. 4,500 روپے
3. 14,000 روپے
4. 75,000 روپے
5. 6.84% (تقریباً)
6. $7\frac{1}{2}$ فیصد
7. 3 سال
8. 2 سال
9. 14,550 روپے
10. (i) 2,193.75 روپے (ii) 57,150 روپے
11. 22,92,960 روپے

مشق 4.6

1. 10 %
2. 2,400 روپے
3. 3,900 روپے
4. 1,584 روپے
5. چھوٹ 1,600 روپے ؛ قیمت فروخت 6,400 روپے
6. $187.50 =$ کھانے کی اشیاء پر چھوٹ ؛ $1062.50 =$ قیمت فروخت
 $150 =$ دوسری اشیاء پر چھوٹ ؛ $600 =$ قیمت فروخت
7. 575 روپے

مشق 4.7

1. 56,250 روپے
2. بشمول پر بیمہ فیس 10,900 روپے
3. 14,170 روپے
4. 2992.50 روپے
5. 78039.36 روپے
6. 1,19,700 روپے
7. 69,105 روپے

مشق 4.8

1. 1,000 روپے
2. 51,000 روپے
3. 91,875 روپے
4. 117,500 روپے
5. 236,250 روپے
6. 337,500 روپے
7. 446,875 روپے
8. 596,875 روپے
9. 3,145,500 روپے ، 2,945,500 روپے

جائزہ مشق 4

1. (i) a (ii) a (iii) a (iv) b (v) b (vi) a (vii) a
(viii) a (ix) b (x) c
4. 19,200 روپے
5. 1,515,000 روپے
6. 50,000 روپے
7. 28%

مشق 5.1

1. (i) 4 (ii) -1 (iii) 0 (iv) -8
2. (i) x (ii) y, x (iii) x (iv) y
3. (i) c اور b, a (ii) d اور c (iii) d اور b (iv) d اور a
4. جملے (i)، (ii)، (v) اور (vi) کثیر رقمیاں ہیں جبکہ جملے (iii) اور (iv) کثیر رقمیاں نہیں ہیں۔
5. (i) 3 اور 6، 7 (ii) -3 اور 5 (iii) 5 اور 2، 8 (iv) -2 اور 3، 9
6. (i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4
7. (i) یک درجی (ii) دو درجی (iii) دو درجی (iv) یک درجی (v) سہ درجی
(vi) چہار درجی (vii) چہار درجی (viii) دو درجی

مشق 5.2

1. (i) $2x^2 + 1$ (ii) $4a^3 + a^2 - 2a + 4$ (iii) $3b^3 + 2ab^2$
2. (i) $x^4 - 4x^3 + 1$ (ii) $x - y + 2$ (iii) $-5a^2b - 2b^3$
3. $3a^4 + 4a^3 - 7a^2 + 7a - 18$ 4. $-y + 2x^2y + 2x - 3$ 5. $3x^3 + 3x^2 - 3x - 13$
6. (i) $x^3 + 27$ (ii) $12x^4 - 34x^3 + 37x^2 - 17x + 5$ (iii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
7. $PQ = x^2y^2 - x^3z - y^3z + xyz^2$, $QR = y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz$
 $PR = x^2z^2 - x^3y - yz^3 + xy^2z$, $PQR = xyz(x^3 + y^3 + z^3) - (x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$
8. (i) $x + 3$ (ii) $x^2 - 3x - 10$ (iii) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$
(iv) $x^2 - x - 12$ (v) $4a^3 + 2a^2 + a - 1$ (vi) $x^2 - xy - y^2$
9. 3 10. $2y - 1$ 11. $P = 9$

جائزہ مشق 5

1. (i) a (ii) b (iii) b (iv) c (v) b (vi) b (vii) b (viii) b
(ix) b (x) d
2. (i) 1، یک درجی، ہاں (ii) نہیں، کثیر رقمی نہیں ہے (iii) مستقل، ہاں (iv) چہار درجی کثیر رقمی، ہاں
3. (i) $3a + 5b + 9c$ (ii) $-10x^3 + 4y^2 - 7z$
4. (i) $-7x^2 + 8y^2 + 3z^2$ (ii) $11x^3 - 2x^2 - 35$ (iii) $-y^4 + 10y^2 - 25$
(iv) $12a^3 - 21ab + 15a + 8a^2b - 14b^2 + 10b$ (v) $x^3 + x^2 + x + 2$

مشق 6.1

1. (i) 2809 (ii) 5929 (iii) 259081 (iv) 1012036
2. (i) 3249 (ii) 9025 (iii) 357604 (iv) 3988009
3. (i) 2484 (ii) 39991 (iii) 999999 (iv) 0.9984
4. (i) 47 (ii) 11 (iii) 7

مشق 6.2

- | | | |
|------------------------|---------------------|-----------------------|
| 1. $3(x-3y)$ | 2. $x(y+z)$ | 3. $2a(3b-7c)$ |
| 4. $3m^2n(mp-2)$ | 5. $15x(2x^2-3y)$ | 6. $17(x^2y^2-3)$ |
| 7. $x(4x^2+3x+2)$ | 8. $2p(p-2p^2+4)$ | 9. $xy(x^2-x+y)$ |
| 10. $7x(x^3-2xy+3y^3)$ | 11. $xyz(xyz-z+1)$ | 12. $4xy(x^2y-2+y^2)$ |
| 13. $xy^2(y^2-3y-6)$ | 14. $xyz(xy+xz+yz)$ | 15. $11xy(7x-3y-5xy)$ |
| 16. $5x^3(x^2+2x+3)$ | | |

مشق 6.3

- | | | |
|------------------------|--------------------|------------------|
| 1. $(x-y)(a+b)$ | 2. $(a-3c)(2b-1)$ | 3. $(x-3)(x+2)$ |
| 4. $(x+5)(x-2)$ | 5. $(x+2)(x-7)$ | 6. $(x+3)(x-4)$ |
| 7. $(y-9)(y+3)$ | 8. $(x-8)(x-4)$ | 9. $(x-5)(x-7)$ |
| 10. $(x-13)(x-2)$ | 11. $(x-y)(a-b)$ | 12. $(y-a)(y-b)$ |
| 13. $(pq-rs)(a^2+b^2)$ | 14. $(x+y)(ab+cd)$ | |

مشق 6.4

- | | | | | |
|--|--|---------------------|--|------------------|
| 1. $(x+7)^2$ | 2. $(3a+2b)^2$ | 3. $(4+3a)^2$ | 4. $(5x+8y)^2$ | 5. $7(a+6)$ |
| 6. $4(a+15)^2$ | 7. $(x-17)^2$ | 8. $(7x-6)^2$ | 9. $(x-9y)^2$ | 10. $(a^2-13)^2$ |
| 11. $2(a-16)^2$ | 12. $(1-3a^2b^2c)^2$ | 13. $x^2(2x-5yz)^2$ | 14. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y\right)^2$ | |
| 15. $\left(\frac{7}{8}x - \frac{8}{7}y\right)^2$ | 16. $\left(\frac{ax}{b} - \frac{cy}{d}\right)^2$ | 17. $4x^4(2x-1)^2$ | 18. $(a^2b^2x - c^2d^2y)^2$ | |

مشق 6.5

- | | | | |
|--|--|-------|-----------|
| 1. $(3-x)(3+x)$ | 2. $6(y-1)(y+1)$ | | |
| 3. $(4xy-5ab)(4xy+5ab)$ | 4. $xy(x-y)(x+y)$ | | |
| 5. $16(a-5b)(a+5b)$ | 6. $a^2b(b-8)(b+8)$ | | |
| 7. $7x(y-7)(y+7)$ | 8. $5x(x-3)(x+3)$ | | |
| 9. $11(a+b-3c)(a+b+3c)$ | 10. $3(5-a+b)(5+a-b)$ | | |
| 11. $\left(x-\frac{9}{5}+\frac{6}{5}y\right)\left(x-\frac{9}{5}-\frac{6}{5}y\right)$ | 12. $\left(9x+\frac{53}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$ | | |
| 13. $(11a-3b)(11b-3a)$ | 14. $\left(14x-\frac{23}{2}\right)\left(-2x+\frac{17}{2}\right)$ | | |
| 15. 121000 | 16. 348340 | 17. 1 | 18. 0.800 |

مشق 6.6

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. $(a+b-c)(a+b+c)$ | 2. $(a+3b+4c)(a+3b-4c)$ | 3. $(a+b+3ab)(a+b-3ab)$ |
| 4. $(x-2y-3xy)(x-2y+3xy)$ | 5. $(3a-b-4c)(3a-b+4c)$ | |

مشق 6.7

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| 1. (i) $x^3+12x^2+48x+64$ | (ii) $8m^3+12m^2+6m+1$ |
| (iii) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$ | (iv) $125x^3-75x^2+15x-1$ |

- (v) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$ (vi) $27x^3 + 270x^2 + 900x + 1000$
 (vii) $8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3$ (viii) $64 - 144a + 108a^2 - 27a^3$
 (ix) $27x^3 + 81x^2y + 81xy^2 + 27y^3$ (x) $343 + 294b + 84b^2 + 8b^3$
 (xi) $64x^3 - 96x^2y + 48xy^2 - 8y^3$ (xii) $125m^3 + 300m^2n + 240mn^2 + 64n^3$
 2. 488 3. 36 4. 322 5. 14 6. (i) 2197 (ii) 1092727 (iii) 0.970299

مشق 6.8

1. (i) $x - y = 26$ (ii) $6x = y$ (iii) $x + 3y = 25$
 (iv) $\frac{x+y}{x-y} = 1$ (v) $2x + 7 = y$
 2. $(1, 1), \frac{a}{2}, 2\frac{0}{0}$ 3. $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ 4. $(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)$
 5. ہاں 6. $(0, 3)$

مشق 6.9

1. (i) $\{(2, -1)\}$ (ii) $\{(1, 1)\}$ (iii) $\left\{\left(0, 1\right)\right\}$
 (iv) $\{(4, 0)\}$ (v) $\left\{\left(\frac{30}{19}, -\frac{18}{19}\right)\right\}$ (vi) $\{(5, 2)\}$
 2. (i) $\left\{\left(\frac{8}{3}, \frac{-1}{6}\right)\right\}$ (ii) $\left\{\left(\frac{7}{9}, \frac{50}{9}\right)\right\}$ (iii) $\left\{\left(\frac{23}{25}, \frac{-88}{25}\right)\right\}$
 (iv) $\left\{\left(\frac{11}{19}, \frac{24}{19}\right)\right\}$ (v) $\left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)\right\}$ (vi) $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)\right\}$
 3. (i) $\left\{\left(\frac{-8}{3}, \frac{-7}{3}\right)\right\}$ (ii) $\left\{\left(\frac{-441}{23}, \frac{433}{23}\right)\right\}$ (iii) $\left\{\left(\frac{140}{17}, \frac{50}{17}\right)\right\}$
 (iv) $\{(11, 1)\}$ (v) $\{(-2, -3)\}$ (vi) $\left\{\left(\frac{-68}{9}, \frac{47}{9}\right)\right\}$

مشق 6.10

1. 2 2. -16 3. 3, 2 4. 11, 7
 5. سال = 14 عدنان کی عمر ، سال = 7 عدیل کی عمر
 6. سال = 61 احسن کی عمر ، سال = 13 شکیل کی عمر
 8. روپے = 80 فی کلوگرام آم کی قیمت ، روپے = 50 فی کلوگرام آم تریوز کی قیمت
 9.. روپے = 180 باسکٹ بال ، روپے = 250 فٹبال 10. $\frac{3}{5}$ 11. $\frac{4}{7}$

مشق 6.11

1. (i) $bc = ad$ (ii) $y = \frac{1}{5}$ (iii) $2a(a - b) = 0$
 (iv) $a^2 + b^2 + 6ab = 0$ (v) $\ell^2 - m^2 + a = 0$
 2. (i) $2S = t(2v_f - at)$ (ii) $2aS = at(-at + 2v_f)$ (iii) $2S = 2v_f t + 3gt^2$

مشق 6.12

1. (i) $m^2 - n^2 = -2$ (ii) $a^2 - 4b^2 = -8$ (iii) $a^2 - b^2 = -2$ (iv) $4a^2 - 9b^2 = 4$
 (v) $m^3 - \ell^3 = 3\ell$ (vi) $p^2 - 2q^2 = -2$ (vii) $9m^4 - n^4 = 2$ (viii) $2(2a^2 + 1) = 0$
2. (i) $b^2x^3 = a^3y^2$ (ii) $x^2 + y^2 = -6xy$

جائزہ مشق 6

1. (i) a (ii) d (iii) c (iv) b (v) b (vi) b (vii) a
 (viii) c 3. 2207
4. (i) $3x(y + 2xy^2 + 3z)$ (ii) $(y^2 - 6)^2$ (iii) $(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$
5. (i) 2197 (ii) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ (iii) $343a^3 - 147a^2b + 21ab^2 - b^3$
6. 110 7. (i) $b^2c + mab = 0$ (ii) $n^2s + \ell nt + \ell^2u = 0$
8. (i) $a^2 - 9b^2 - 18 = 0$ (ii) $a^3 + 9b = 27b^3$ (iii) $a^4 + 2 + 4a^2 = b^4$ 9. $\frac{5}{7}$
10. (i) $x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (ii) $\frac{1}{a^2x^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

مشق 7.1

1. 90° 2. 60° 3. 54° 4. $m\angle 4 = m\angle 5 = m\angle 8 = 105^\circ$
5. (i) $7, 75^\circ$ (ii) $-7, 132^\circ$ (iii) $35, 110^\circ$ (iv) $45, 60^\circ$

مشق 7.2

1. (i) $e = 63^\circ, f = 78^\circ$ (ii) $x = 110^\circ, y = 70^\circ$ (iii) $g = 16cm, h = 14cm$
 (iv) $x = 95^\circ, y = 95^\circ$ (v) $x = 20^\circ$

مشق 7.3

1. (i) $x = 30^\circ, y = 110^\circ, z = 30^\circ$ (ii) $x = 70^\circ, y = 65^\circ, z = 45^\circ$
 (iii) $x = 50^\circ, y = 40^\circ, z = 40^\circ$
2. $76^\circ, 104^\circ$ 3. $36^\circ, 144^\circ$ 4. $85^\circ, 95^\circ$ 5. 156°

جائزہ مشق 7

1. (i) a (ii) a (iii) d (iv) a (v) a (vi) a (vii) c
 (viii) d (ix) a (x) b (xi) c (xii) d (xiii) d
2. (a) (i) $1, 9 ; 2, 10 ; 3, 11 ; 4, 12$
 $5, 13 ; 6, 14 ; 7, 15 ; 8, 16$
 (ii) $6, 9 ; 8, 11 ; 5, 10 ; 7, 12$
 (iii) $1, 6 ; 2, 5 ; 3, 8 ; 4, 7$
 $9, 14 ; 10, 13 ; 11, 16 ; 12, 15$
 (iv) $5, 9 ; 6, 10 ; 7, 11 ; 8, 12$
- (b) $m\angle 2 = 25^\circ, m\angle 3 = 25^\circ, m\angle 8 = 155^\circ, m\angle 14 = 155^\circ, m\angle 16 = 155^\circ$
3. (i) 124° (ii) 52° (iii) 23°

جائزہ مشق 8

1. (i) b (ii) a (iii) b (iv) a (v) a (vi) b (vii) b (viii) a

مشق 9.1

1. (i) $13cm$ (ii) $2\sqrt{7} cm$ (iii) $12cm$ (iv) $25cm$ (v) $8cm$ (vi) $10c$
 2. $7cm$ 3. $8m$ 4. $7.5cm$ 6. $10.12m$ 7. قائمہ الزاویہ مثلث نہیں ہے (i)
 8. (i) $11cm$ (ii) $1cm$ (iii) $1m$ (iv) $6\sqrt{5} m$
 (v) $10\sqrt{2} dm$ (vi) $5\sqrt{5} dm$ 9. $\sqrt{a^2 - 25}$

مشق 9.2

1. $2754m^2$ 2. (i) $84cm^2$ (ii) $30cm^2$ (iii) $272.02cm^2$
 3. (i) $6m, 14.70m^2$ (ii) $6m, 24m^2$ (iii) $7m, 8.79m^2$ (iv) $5.25m, 4.353m^2$
 4. (i) $261.90cm^2$ (ii) $232.93cm^2$ (iii) $4.68cm^2$ (iv) $2.00cm^2$
 5. (a) (i) $24cm^2$ (ii) $24cm^2$ (b) $48cm^2$

مشق 9.3

1. (i) $154cm^2$ (ii) $98.56m^2$ (iii) $0.55m^2$
 2. (i) $3.5m$ (ii) $4.29m$ (iii) $4.95m$
 3. (i) $817.6cm^3$ (ii) $2759.44cm^3$ (iii) $1437.33 cm^3$
 (iv) $164.70m^3$
 4. (i) $4cm, 268.19 cm^3$ (ii) $0.44 cm, 0.36cm^3$ (iii) $7m, 1437.33m^3$
 5. 1913090.67 ل³ 6. (i) 4:1 (ii) 8:1
 7. $V = 2304 \pi cm^3, 13824$ (تقریباً) 8. $900cm$

مشق 9.4

1. (i) 6, 188.57, 113.14, 301.71 (ii) 5, 47.14, 28.28, 75.42
 (iii) 23.32, 707.14, 254.57, 961.71 (iv) 7, 7.14, 10, 220
 2. (i) $37.7cm^3$ (ii) $513.33cm^3$ (iii) $125.7cm^3$ (iv) $201.35cm^3$
 3. $83.79 cm^3$ (تقریباً) 4. $75.43cm^3$ (تقریباً) 5. $134.75cm^3$ 6. 44

جائزہ مشق 9

1. (i) b (ii) a (iii) c (iv) c (v) a (vi) c
 3. (i) $137.31cm^3$ (تقریباً) (ii) $37.71cm^3$ (تقریباً) (iii) $8.18cm^2$ (تقریباً)

مشق 10.1

1. (i) 134° (ii) 76 (iii) $45^\circ, 135^\circ$ (iv) 30° (v) 165° (vi) 135°

مشق 10.2

1. $m\overline{PQ} = m\overline{ST}$, $m\overline{QR} = m\overline{TU}$, $m\overline{RQ} = m\overline{US}$
 $m\angle P = m\angle S$, $m\angle Q = m\angle T$, $m\angle R = m\angle U$
 2. (a) SAS (b) SSA (c) SAS (d) SSA 5. 90°

جائزہ مشق 10

1. (i) d (ii) a (iii) a (iv) d (v) a (vi) a (vii) d
 (viii) a (ix) b (x) c
2. (i) $x = 20^\circ, 105^\circ, 75^\circ$ (ii) 93°
 (iii) $a = 114^\circ, b = 66^\circ$ (iv) $x = 31^\circ, 42^\circ, 107^\circ$

مشق 11.1

- 1.(a) (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{4}{3}$ (iv) $\frac{5}{3}$ (v) $\frac{5}{4}$
 (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{3}{4}$ (viii) $\frac{3}{5}$ (ix) $\frac{5}{4}$ (x) $\frac{4}{5}$
- (b) (i) $\frac{8}{17}$ (ii) $\frac{15}{17}$ (iii) $\frac{8}{15}$ (iv) $\frac{17}{15}$ (v) $\frac{17}{8}$
 (vi) $\frac{8}{15}$ (vii) $\frac{15}{8}$ (viii) $\frac{15}{17}$ (ix) $\frac{17}{8}$ (x) $\frac{8}{17}$
2. (i) $\frac{mBC}{mAC}$ (ii) $\frac{mAB}{mAC}$ (iii) $\frac{mBC}{mAB}$ (iv) $\frac{mAB}{mAC}$
 (v) $\frac{mBC}{mAC}$ (vi) $\frac{mAB}{mBC}$
3. (i) $\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c}$ (ii) $\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$ (iii) $\frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ (iv) $\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}}$
 (v) $\frac{b}{c}$ (vi) $\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c}$ (vii) $\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$ (viii) $\frac{c}{b}$
 (ix) $\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c}$ (x) $\frac{b}{c}$ (xi) $\frac{b}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ (xii) $\frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}}$
4. (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ (iii) 0 (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جائزہ مشق 11

1. (i) b (ii) b (iii) a (iv) b (v) c (vi) b
 (vii) b (viii) c (ix) a (x) a (xi) b
2. (i) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ (iv) 1
3. (i) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{7}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

مشق 12.2

1. (i) عادی = 8 ، وسطانی = 5.5 ، حسابی اوسط = 5.4
 - (ii) عادی = 5 ، وسطانی = 5 ، حسابی اوسط = 4.64
 - (iii) عادی = 4 ، وسطانی = 4 ، حسابی اوسط = 17.5
 - (iv) کوئی نہیں = عادی ، 75 = وسطانی ، 76.2 = حسابی اوسط
 - (v) عادی = 80 ، وسطانی = 76.5 ، حسابی اوسط = 72.9
 - (vi) عادی = 3 ، وسطانی = 3 ، حسابی اوسط = 3.15
 - (vii) عادی = 106, 107, 108 ، وسطانی = 106 ، حسابی اوسط = 105
 - (viii) عادی = 7, 8 ، وسطانی = 7 ، حسابی اوسط = 7.27
 - (ix) کوئی نہیں = عادی ، 146.5 = وسطانی ، 174 = حسابی اوسط
 - (x) عادی = 2500 ، وسطانی = 3937.5 ، حسابی اوسط = 4344
2. روپے 120.74
 3. عادی = 1, 5, 10 ، وسطانی = 10 ، حسابی اوسط = 11.8
 4. عادی = 2 ، وسطانی = 3 ، حسابی اوسط = 3.2
 5. حسابی اوسط = 104.81 ، وسطانی قیمت : 19.5, 59.5, 99.5, 139.5, 179.5
 6. عادی = 2 ، وسطانی = 2.15 ، حسابی اوسط = 19.53

جائزہ مشق 12

1. (i) b (ii) c (iii) a (iv) b (v) a (vi) a
(vii) c (viii) b (ix) c

	حسابی اوسط	وسطانی	عادی
a.	5	4	3
b.	11	11	12
c.	5.5	5	5
d.	7	7.5	8
e.	154.3	154.7	152.3

4. روپے 76.7 = عادی ، روپے 76.65 = وسطانی ، روپے 76.68 = حسابی اوسط

فرہنگ

آن لائن بینکنگ: آن لائن بینکنگ میں انٹرنیٹ کے استعمال سے بینک اپنے گاہکوں کو سہولیات مہیا کرتا ہے کہ وہ اپنی رقم ایک اکاؤنٹ سے دوسرے اکاؤنٹ میں رقم کی منتقلی کروا سکتا ہے۔ یوٹیلیٹی بل ادا کر سکتا ہے۔

اثباتی جیومیٹری: اثباتی جیومیٹری میں ہندی اشکال کی مدد سے ریاضیاتی بیانات کی سچائی ثابت کی جاتی ہے۔
اجزائے ضربی: اجزائے ضربی ایسے الجبری جملے ہوتے ہیں جن کا حاصل ضرب دیا ہوا جملہ ہو۔

اساس 2 کا عددی نظام (ثنائی نظام): اساس 2 کے عددی نظام کو ثنائی عددی نظام بھی کہتے ہیں۔ ثنائی عددی نظام میں تمام اعداد کو 0، 1 ہندسوں سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
اساس 5 کا عددی نظام: اساس 5 کے عددی نظام میں 0، 1، 2، 3، 4 ہندسوں سے اعداد کو لکھا جاتا ہے۔

اساس 8 کا نظام (آکٹل سسٹم): اساس 8 کے عددی نظام کو آکٹل نمبر سسٹم (Octal Number System) بھی کہتے ہیں۔ اساس 8 کے عددی نظام میں تمام اعداد کو 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 ہندسوں سے لکھا جاتا ہے۔

اصول متعارفہ: اصول متعارفہ ریاضی کی تقریباً تمام شاخوں میں مشترک ہوتا ہے۔ اسے بغیر ثبوت کے تسلیم کیا جاتا ہے۔

اصول موضوعہ: یہ ایسے مفروضے ہوتے ہیں جنہیں ابتدا میں ہی صحیح تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ ان کا تعلق ریاضی کی کسی مخصوص شاخ سے ہوتا ہے۔
اصل زر: وہ رقم جو قرض دی جاتی ہے یا بینک میں رکھی جاتا ہے اصل زر کہلاتی ہے۔

اعشاری نظام: اعشاری عددی نظام مقامی عددی قیمت کا نظام ہے جس میں ہر مقام کی قیمت 10 کی قوت سے ہوتا ہے۔

الجبری جملہ: ایسا جملہ جو الجبری عوامل (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر) کے ذریعے متغیرات اور مستقلات کو ملائے الجبری جملہ کہلاتا ہے۔

انٹرنس: انٹرنس (بیمہ) دو پارٹیوں کے درمیان ایک معاہدہ ہوتا ہے جس میں بیمہ کمپنی، بیمہ دار کو زندگی کے خطرات، چوری یا نقصان وغیرہ کی صورت میں تحفظ مہیا کرتی ہے۔

انکم ٹیکس: انکم ٹیکس ایک شخص کی سالانہ آمدنی پر لگایا جاتا ہے۔ آمدنی کی حد حکومت مقرر کرتی ہے۔

اورورڈرافٹ: اورورڈرافٹ ایک ایسی سہولت ہے جو بینک اپنے کھاتہ داروں کو مہیا کرتا ہے۔ وہ کھاتے میں موجود رقم سے زیادہ رقم نکلا سکتے ہیں۔

اے۔ ٹی۔ ایم۔ اے۔ ٹی۔ ایم۔ ایک الیکٹرانک مشین ہے، اس کے ذریعے کھاتہ دار اپنے اکاؤنٹ کا بیلنس معلوم کر سکتا ہے اور رقم نکلا سکتا ہے۔

بیان مسئلہ: یہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جو جیومیٹری کی کسی سچائی کے متعلق ہوتا ہے اور جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

بنیادی مفروضے: ایسے بیانات کو جو بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیے جاتے ہیں بنیادی مفروضے کہلاتے ہیں۔

بینکنگ: بینکنگ ایک ایسا کاروبار ہے جس میں لوگوں سے روپیہ وصول کیا جاتا ہے، اُس کی حفاظت کی جاتی ہے، لوگوں کو روپیہ قرض دے کر نفع کمایا جاتا ہے۔

پے آرڈر: پے آرڈر، رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ ہے جس میں درج مخصوص شخص اس پر درج شدہ رقم کسی بھی بینک سے وصول کر سکتا ہے۔

تختی سیٹ: سیٹ A سیٹ B کا تختی سیٹ ہے اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو۔

تعدد: ایسا نمبر جو بتاتا ہے کہ ایک قدر کتنی دفعہ آئی ہے، تعدد کہلاتی ہے۔

تعددی تقسیم: مواد کو جدول کی صورت میں اس طرح لکھنا کہ ہر جماعت کے جماعتی تعدد کا فوراً مشاہدہ کیا جاسکے، تعددی تقسیم کہلاتا ہے۔

تعددی تقسیم کا جدول: تعددی تقسیم کا جدول ایک طریقہ ہے جس میں ہم مواد کو ترتیب دے سکتے ہیں تاکہ یہ مزید واضح ہو۔

تقاطع: دو سیٹوں A اور B کا تقاطع سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A اور سیٹ B کے مشترک ممبران پر مشتمل ہو۔

تکونیات: تکونیات مثلث کے عناصر کو واضح کرتی ہے اور مثلث کے مختلف عناصر کو معلوم کرنے کے طریقوں پر مشتمل ہے۔

تکونیاتی نسبتیں: مثلث کے ایک ضلع کی دوسرے اضلاع سے تقسیم کو تکونیاتی نسبتیں کہتے ہیں۔ Sine، Cosine اور Tangent تین عام تکونیاتی نسبتیں ہیں۔

ثابت کرنا: مسئلہ کے اس حصہ میں وہ کچھ لکھا جاتا ہے جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

چوکور: چار اضلاع پر مشتمل کثیر الاضلاع کو چوکور کہتے ہیں۔

حرفی مقداریں: ایسے حروف تہجی کو جو مستقل مقداروں کو یا عددسروں کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوں حرفی مقداریں کہتے ہیں۔

حسابی اوسط: جب تمام مدات کے مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے تو وہ قیمت حسابی اوسط کہلاتی ہے۔
 حقیقی اعداد: حقیقی اعداد کا سیٹ، ناطق اور غیر ناطق اعداد کو یوں میں سیٹ ہے۔
 دائرہ: دائرہ جیومیٹری کی ایک سادہ بند مستوی یا مستوی پرسادہ بند منحنی شکل ہے کہ اس پر کے تمام نقاط ایک معین نقطہ سے ہم فاصلہ ہوتے ہیں۔
 دعویٰ جیومیٹری کی کسی سچائی کے متعلق ایسے بیان کو جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں دعویٰ کہتے ہیں۔
 ڈیٹ کارڈ: ڈیٹ کارڈ کے ذریعے کھاتہ دار اپنے اکاؤنٹ سے رقم نکال سکتا ہے، خریداری کر سکتا ہے۔
 ڈیمانڈ ڈرافٹ: ڈیمانڈ ڈرافٹ رقم کی ادائیگی کا ایک ہدایت نامہ ہے جس میں بینک کی ایک برانچ اپنے ہی بینک کی دوسری برانچ سے مخصوص شخص کو ادا کو ادا کرنے کے لیے کہتا ہے۔
 سیٹ: واضح اشیاء کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔ جس اشیا پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے وہ اس سیٹ کے ارکان یا ممبران کہلاتے ہیں۔
 شراکت: ایک کاروبار جس میں دو یا دو سے زیادہ اشخاص مل کر کاروبار کریں اور نفع و نقصان میں شریک ہوں شراکت کہلاتی ہے۔
 عادہ: عادہ سے مراد وہ قیمت جو مواد میں سب سے زیادہ بار آئے۔
 غیر مختتم اعشاریہ کسر: ایک کسر اعشاریہ جس میں کسری حصہ میں ہندسوں کی تعداد لامحدود ہو غیر مختتم کسر اعشاریہ کہلاتی ہے۔
 غیر ناطق اعداد: ایسے اعداد جنہیں $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا نہیں جا سکتا جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$ کو غیر ناطق اعداد کہتے ہیں۔
 عمل: مسئلہ کے اس حصہ (عمل) میں شکل میں اضافہ کیا جاتا ہے تاکہ ثبوت دینے میں آسانی ہو۔
 غیر واجب تہتی سیٹ: اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور سیٹ A ، سیٹ B کا تہتی سیٹ ہو اور سیٹ B بھی سیٹ A کا تہتی سیٹ A سیٹ B کا واجب تہتی سیٹ ہوگا اور سیٹ B سیٹ A کا غیر واجب تہتی سیٹ ہوگا۔
 فارن کرنسی کا وٹ: فارن کرنسی کا وٹ پاکستانی کرنسی کے علاوہ غیر ملکی کرنسی میں کھولا جاتا ہے۔
 قاطع: یہ ایک خط مستقیم ہے جو دائرہ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔ وتر کو دونوں طرف بڑھانے سے قاطع بنتا ہے۔
 کالمی نقشہ: کالمی نقشہ تعددی تقسیم کا ایسی مستطیلوں کے ذریعے اظہار ہے جس کی چوڑائی جماعتی وقفوں کو ظاہر کرتی ہے اور جن کا رقبہ ان کے متعلقہ جماعتی تعدد کے متناسب ہو۔
 کثیر الاضلاع: جیومیٹری کی ایسی بند مستوی جو تین یا تین سے زیادہ اضلاع پر مشتمل ہو کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔
 کثیر رقمی: کثیر رقمی ایک ایسا الجبری جملہ ہوتا ہے جس میں ایک یا ایک سے زیادہ قوتوں ہو سکتی ہیں اور تغیرات میں سے ہر ایک کا قوت نما صفر یا مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔
 کریڈٹ کارڈ: کریڈٹ کارڈ پلاسٹک کا ایک کارڈ ہوتا ہے اس کے ذریعے کھاتہ دار خریداری کر سکتا ہے۔
 کمرشل بینکنگ: بینک کا کام لوگوں کی امانتوں کو اپنی تحویل میں رکھنا ہوتا ہے۔ گاہکوں کو قرض دینا اور دیگر سہولیات فراہم کرنا بھی ہوتا ہے، یہی کمرشل بینکنگ ہے۔
 لیز: لیزنگ (ٹھیک) ایک معاہدہ ہے، جس میں اثاثہ کا مالک اثاثہ کرایہ پر لینے والے کو خاص مدت کے لیے کرایہ کی ادائیگی کے بدلے میں اثاثہ کو استعمال کرنے کی اجازت دیتا ہے۔
 مارک اپ: جب ہم کوئی کاروبار چلانے کے لیے بینک سے قرض لیتے ہیں تو بینک اصل رقم کے علاوہ کچھ اضافی رقم بھی وصول کرتا ہے۔ اس اضافی رقم کو مارک اپ کہتے ہیں۔
 متقاطع خطوط: ایسے دو خط مستقیم جو ایک دوسرے کو قطع کریں متقاطع خطوط کہلاتے ہیں۔
 متوازی الاضلاع: چار اضلاع پر مشتمل کثیر الاضلاع کو جس کے مخالف اضلاع برابر ہوں متوازی الاضلاع کہلاتی ہے۔
 متوازی خطوط: مستوی پر دو خطوط جو ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔
 مختتم کسر اعشاریہ: ایسی کسر اعشاریہ جس کے کسری حصے میں ہندسوں کی تعداد متناہی ہو مختتم کسر اعشاریہ کہلاتی ہیں۔
 مرکب تناسب: دو یا دو سے زیادہ تناسبوں کے درمیان تعلق کو تناسب مرکب کہتے ہیں۔
 مرکزی رجحان: مرکزی رجحان کی تعریف ”شمار یاتی پیمائش“ جو تمام تقسیم کی قائم مقام ایک واحد قیمت کی نشاندہی کرتی ہے۔
 مسئلہ فیثاغورث: مسئلہ فیثاغورث کا بیان ”قائمہ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع، متقابلہ اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔“
 مسئلہ کے اجزا: بیان (دعویٰ)، معلوم، مطلوب، عمل، ثبوت وغیرہ مسئلہ کے اجزا ہیں۔
 مکعب: کسی عدد کے مکعب سے مراد ایسا عدد ہے جسے آپس میں تین دفعہ ضرب دے کر حاصل کیا جاتا ہے۔
 معلوم: بیان مسئلہ کا وہ حصہ، جس میں مسئلہ سے متعلق جو کچھ دیا ہوتا ہے، معلوم کہلاتا ہے۔
 مربع: ایک عدد اور اسی عدد کی حاصل ضرب اُس کا مربع کہلاتی ہے۔

مماس: ایسا خط مستقیم جو دائرہ کو صرف ایک بیرونی نقطہ پر چھو کر گزرتا ہو، دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔
 منظم منحنی: ایک منظم منحنی جس کے پانچ اضلاع لمبائی میں برابر اور اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 540° ہوتا ہے۔
 منظم مسدس: ایک منظم مسدس جس کے چھ اضلاع لمبائی میں برابر اور اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 720° ہوتا ہے۔
 نتیجہ صریح: نتیجہ صریح ایک مسئلہ ہوتا ہے جو ثابت کیے گئے مسئلہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔
 ہم دائرہ نقاط: ایسے تمام نقاط ہم دائرہ کہلاتے ہیں جو ایک ہی دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔
 ہم مرکز دائرے: ایک سے زیادہ ایسے دائرے جو ایک ہی مرکز پر واقع ہوں ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔
 واجب تختی سیٹ: اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو لیکن سیٹ A کا کم از کم ایک رکن ایسا ہو جو سیٹ B کا رکن نہ ہو تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تختی سیٹ کہلائے گا۔
 وتر (دائرے کا وتر): یہ ایک قطعہ خط ہے جس کے سرے دائرہ پر واقع ہوں وتر کہلاتا ہے۔
 وراثت (ترکہ): جب ایک شخص وفات پا جاتا ہے تو جو کچھ وہ چھوڑ کر مرتا ہے ترکہ کہلاتا ہے۔
 وسطانیہ: وسطانیہ ایک ایسی قیمت ہے جو درمیانی پوزیشن پر واقع ہو جب تمام مشاہدات کو ترتیب صعودی یا نزولی سے لکھا جائے۔
 وین اشکال: وین اشکال سیٹوں کی تصویری نمائندگی اور ان پر کیے گئے عوامل ہیں۔
 یک درجی مساوات: ایسی مساوات جس میں کثیر رقمیوں کا درجہ ایک ہو یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔
 یونین: دو سیٹوں A اور B کا یونین سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A اور سیٹ B کے تمام ممبران پر مشتمل ہو اور مشترک ممبران صرف ایک دفعہ لکھیں جائیں۔

علامات

علامات	اظہار	علامات	اظہار
<	چھوٹا ہے	:	نسبت
>	بڑا ہے	::	تناسب
≤	چھوٹا ہے یا برابر ہے		نہیلی نشان
≥	بڑا ہے یا برابر ہے	∑	مجموعہ
=	برابر ہے	\overline{AB}	قطعہ خط AB
≠	برابر نہیں ہے	\vec{AB}	شعاع AB
↯	چھوٹا نہیں ہے	\overleftarrow{AB}	خط AB
≠	بڑا نہیں ہے	∠	زاویہ
∈	رکن ہے	Δ	مثلث
∉	رکن نہیں ہے	{ } اور φ	خالی سیٹ
∀	سب کے لیے	~	متضاد ہے
√	جذرا لریخ	≅	متماثل ہے
⇒	اس سے مراد ہے کہ	≈	تقریباً برابر ہے
∪	یونین		متوازی ہے
∩	تقاطع	\widehat{AB}	قوس AB
∴	کیوں کہ / جیسا کہ	↔	مطابقت
∴	چنانچہ / پس	%	فیصد
U	یونیورسل سیٹ		جگہ